

令和 2 年 6 月 4 日現在

機関番号：32689

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K16690

研究課題名(和文)ブラウワー直観主義の証明論的手法による再検討

研究課題名(英文)Reexamination of Brouwer's intuitionism by proof-theoretic methods

研究代表者

秋吉 亮太(Akiyoshi, Ryota)

早稲田大学・高等研究所・その他(招聘研究員)

研究者番号：20587852

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：ブラウワー直観主義を証明論的手法で検討することで次の成果が得られた。哲学的研究については、(i)ブラウワーのバー帰納法の証明についての証明論的な解釈(ii)ゲンツェンの無矛盾性証明における内容的な要素と形式的な要素の関係の解明。論理学的研究については(i)規則の証明論的研究(ii)規則の理論計算機科学への応用。

これらの成果はすべて、哲学や数学基礎論、理論計算機科学分野における国際的な査読付き雑誌や会議で発表された。規則という伝統的な証明論(数学基礎論)の手法をツールとしたこれまでの研究の成果が出たとまとめられる。また、竹内外史の論理哲学に関する研究を開始することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでブラウワー直観主義とヒルベルトの形式主義は対立する学派であるとみなされてきたが、ヒルベルトに由来する証明論的手法でブラウワー直観主義を探求したことで、これらの学派の間にこれまで気づかれて来なかった哲学的なつながりや論理学的なつながりを見出すことができた。

さらに、日本が産んだ最大の論理学者である竹内外史の思想を研究するという新たな方向性を得た。

研究成果の概要(英文)：By studying Brouwer's intuitionism by proof-theoretic methods, we obtained the following outputs. As to philosophical investigations, (i) a proof-theoretic interpretation of Brouwer's proof of bar induction, (ii) an elucidation of the relationship between contentual and formal elements in Gentzen's consistency proofs. As to logical investigations, (i) proof-theoretic results about the Omega-rule, (ii) an application of the Omega-rule to the context of theoretical computer science (typed lambda calculus).

All of these were published from refereed international journals and refereed international conferences. In short, our works via the Omega-rule (, which is a traditional method in proof-theory) produced fruitful results. Moreover, we began a new research about Gaisi Takeuti's philosophy of mathematics based on them.

研究分野：哲学, 数学, 理論計算機科学

キーワード：論理学の哲学 数学の哲学ブラウワー ヒルベルト 理論計算機科学 ラムダ計算 数学基礎論 証明論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

数学・論理学の哲学において、数学の基礎を心の働きに求めるブラウワーの直観主義は、記号にその基礎を求めるヒルベルトの形式主義とこれまで対立するとされてきた。また、ヒルベルトに由来する証明論は証明を探求対象とする学問領域であり、ゲーデルの不完全性定理のインパクトを経て数学として発展してきたとみなされてきたため、その哲学的基礎を探求する研究は数が少なかった。戦後のドイツや日本で大きく発展してきた証明論の歴史を振りかえってみても、数学的な結果の重要性が強調されてきたといえる。しかしながら、当初の目的や研究者の実際の活動を観察してみるならば、哲学的な意義が問われることには大きな意味がある。歴史的な事実として、例えば、ヒルベルトはカントの直観概念を背景として有限主義の哲学の基礎づけを構想していたと考えられるし、また、証明論において重要な無矛盾性証明が得られた際に、それが有限主義的に許容可能であるかどうかという問題は常に重要である。さらに、戦後の日本で証明論を切り拓いた竹内外史の著作には、「直観」「反省」といった哲学的タームや西田哲学への言及がみられる。

他方で、直観主義はブラウワーの著作が難解であったことやヒルベルトとの政治的な対立が存在していたためか理解されない時期が長かったものの、1950年代以降になって数学基礎論（ハイティンク、クライゼル、トルルストラ）や分析哲学（ダメット）の文脈で注目されてきた。中でもブラウワーが直観主義の根本原理の一つであるパー帰納法の証明（1927年）は、「AならばB」の形をした言明を証明するために、「Aの証明が任意に与えられた時にそれをいつでもBの証明へと変形できる」ことを議論しているのだが、謎めいた点が依然として残っている。すなわち、ブラウワーの議論では与えられたAの証明に一定の制限をかけており、この仮定（「根本仮定」と呼ぶことにする）が説明されていないままであった。そのため、この議論を巡っては様々な解釈が提出されており、一種の哲学的な議論であるという説も提唱されている。しかしながら、ここには与えられた証明を操作するという証明論に典型的なアイデアがみられる。これまでは根本仮定が謎めいていたこともあって、議論の構造を論理的に明らかにする研究は存在していなかったが、その理由として論理的なツールが未発達であったこと、とくに直観主義を証明論の先端的なツールで探求するアプローチがなかったことによると考えられる。したがって、直観主義に関する研究が蓄積してきた現在において、証明論のツールを開発しつつ直観主義の研究を行う学際的なアプローチが必要であるが、これまでに試みられてこなかった。

2. 研究の目的

本研究はブラウワー直観主義を、これまで対立されていると思われてきたヒルベルト学派の証明論的手法を自ら開発しつつ探求することで、その共通基盤を発見することをその目的とする。とくに、上で述べたような、直観主義の基本原理の一つであるパー帰納法の議論を証明論的手法で解析することによって、目標を達成することを目指す。とくに、証明論的な手法を用いることで、根本仮定に対して自然で新たな説明を与える。また、ブラウワーのパー帰納法を巡る議論は、イタリアの論理哲学者マルティノによる研究によって明らかになったように、数学を構成していくいわゆる「創造主体の理論」と本質的に関わっているため、ブラウワーのパー帰納法の議論を証明論的に分析することにより、この理論に対する新たなアプローチを見つけ出すことが期待される。

第二に、ブラウワーの直観主義はヒルベルト学派の俊英であったゲンツェンの無矛盾性証明に大きな影響を与えていることが指摘されてきたが、直観主義を証明論的に探求することで、ブラウワー直観主義とゲンツェンの形式主義との間にさらなる関係性を見出していくこともできると思われる。とくに、ジークが“ In the Shadow of Incompleteness: Hilbert and Gentzen ” (2012年)で提起した問題、つまり「ゲンツェンの証明において内容的な要素と形式的な要素がどのように関連しているのか」という問いにアプローチする。

第三に、ブラウワーの直観主義はドイツ観念論を背景としており、近年になってファン・アッテンらによってフッサール現象学を用いて再解釈できることが指摘されている。本研究はブラウワー直観主義の研究であり創造主体の理論とも深く関わるため、関連研究として、最初期フッサールの論理哲学にもアプローチする。

第四に、上で述べたような研究を行うにあたっては必要な論理的ツールを自身で開発する必要があり、伝統的証明論における基本定理（正規化定理やカット消去定理など）に関する新たな結果が得られることも副次的な目標とする。たとえば、第一の研究を行うにあたってはブラウワーの選列の理論に合わせて 規則を再定式化する必要がある。（規則は基本的に算術の理論がベースとなっているが、選列の理論はより高次の操作を含んでいる）

以上のように本研究の目的は多岐にわたっているが、その背後には、ブラウワー直観主義とヒルベルトの形式主義の基盤を発見することによってこれまでの数学基礎論論争に関する新しい視座を提供するという大きな目標が存在している。

3. 研究の方法

第一の目的、つまり直観主義の根本原理であるバー帰納法の議論でブラウワーが仮定した根本仮定の証明論的分析については、1970年代に再帰的定義の証明論の文脈でプフホルツによって導入された、規則と呼ばれる手法を用いる。規則はヒルベルト学派のプフホルツによって導入された（無限個の前提をもつ）推論規則であるが、その説明を丁寧に読んでみると直観主義的な発想を読み取ることができる。例えば、

彼が1981年の論文（プフホルツ、フェファーマン、ポーラーズ、ジーク編集、*Iterated inductive definitions and subsystems of analysis: recent proof-theoretical studies*, LNM 897.）で述べているように、「AならばB」の証明を「Aの証明が与えられたときにその内部構造によらず、いわばBのそれへと統一的に変形する操作」として考えている。また、この論理体系は直観主義と相性の良い自然演繹体系で定式化されているため、このプフホルツの体系を拡張することでバー帰納法が分析できると思われる。また、歴史的な側面に関しては、これまでにこのような発想そのものがなかったと思われるが、念の為に歴史的な文献調査を行って先行研究を詳しく調べる。

第二の目的については、以前に高橋優太氏（慶應義塾大学博士課程、当時）と共同で出版した論文「ゲンツェンを読む 三つの無矛盾性証明の統一的解釈」（『科学基礎論研究』,2013年）のアプローチを拡張して適用する。ゲンツェンの証明には内容的な側面（証明可能な論理式に有限主義的な意味を付与する側面）と形式的な側面（証明図を変形することで無矛盾性を示

す側面)が混在しており,いわば直観主義的な側面と形式主義的な側面が混在している.そこで,上述の高橋氏とのアプローチによってゲンツェンの複数の無矛盾性証明を分析することでこの問いに答える.

第三の目的については,マルティノによって明らかにされたように,バー帰納法の議論には創造主体の理論が隠れている.論理的な側面については上述の第一の研究によって明らかにされると予想されるが,この創造主体の理論をより深く探求するにあたって,ひとまずはファン・アッテンによるフッサー現象学のターミノロジーを用いたアプローチを用いる.準備作業として最初期フッサーの数学・論理学の哲学を丁寧を追う.

第四の目的については,上述の第一,第二の研究を遂行するにあたって新たな論理的な手法が必要とされることが予想される.とくに,第一の研究を遂行するにはブフホルツの規則の手法を必要に応じて拡張する必要がある.たとえば,ブラウワーの選列の理論に合わせて理論を拡張する必要がある,たとえばクライゼル,トルルストラの“Formal systems for some branches of intuitionistic analysis”(1970年)の形式体系を深く研究する.

4. 研究成果

第一の目的,つまり直観主義の基本原則の一つであるバー帰納法を証明論的手法で解析する点については,1970年代にドイツの論理学者ブフホルツが導入した規則を直観主義数学に適用することでバー帰納法を分析することができた.規則はヒルベルト学派の証明論の中でも順序数解析と呼ばれる伝統的な分野で中心的な役割を果たしてきた手法であり,まとめるとバー帰納法の「無限上昇列が存在しないならば無限下降列が存在しない」というステートメントの「ならば」を規則によって分析した.この結果,ブラウワーの議論にあらわれる根本仮定,すなわち「無限上昇列が存在しない」という言明の可能な証明の形を制限する仮定は,規則の定義に現れる「Aの証明としてカノニカルな証明のみ考える」という制限として解釈されることになった.また,ブラウワーの理論には選列上を走る量子子が用いられており,本研究ではひとまずすべての選列について量化することで定式化した.したがって,ブラウワーの議論は数学的ではないというこれまでの定説に対して,規則を用いることで数学的に理解できるという解釈を与えた.また,副産物として「無限上昇列が存在しない」の言明がある程度単純な場合には,証明論的に重要な性質である正規化定理を証明した.このことは,議論の余地はまだ残っているものの,ブラウワーの根本仮定が直観主義数学を展開する上で正当なものであると解釈可能である.この研究結果については学際的な研究を出版するための査読付き国際会議である *WoLLIC 2018 25th Workshop on Logic, Language, Information and Computation* で発表されて出版に至った.

第二の研究については,高橋優太氏と共同で,ゲンツェンの複数の証明における内容的な側面と形式的な側面の関連性を,現代的な証明論的手法(無限的な証明図の有限的記法)によって再構成することによって明らかにした.また,無限的な証明図の有限的記法を用いることで,ゲンツェンの最初の無矛盾性証明からクライゼルのいわゆる無判例解釈の別証明を与えた.これらの結果については,台湾で行われた *The joint Conference of The 3rd Asian Workshop on Philosophical Logic (AWPL-2016) & The 3rd Taiwan Philosophical Logic Colloquium* で

高橋優太氏と共同発表を行い、査読を経て“Contentual and Formal Aspects of Gentzen's Consistency Proofs”が *Philosophical Logic: Current Trends in Asia* から出版された。

第三の研究については、岡山大学の植村玄輝氏と共同研究を行い、フッセリアーナ 12 巻, 22 巻, そして関連する二次文献の読解作業を行った。特に、記号論や論理学と心理学に関わる論文を読み進め、全訳やまとめの作成を行った。この作業を行う中で最初期フッサールの論理哲学に関する共同研究が始めることができた。ドラフトを完成して投稿するまでには至らなかったものの、英語で共同ドラフトを書き進めた。

第四の研究については、規則に関する数理論理的成果がいくつか出て出版することができた。まず、規則に関しては部分的なカット消去定理から知られていなかったが、スタンフォード大学哲学科ミンツ教授との共同研究によってこれをあらゆる証明図に拡張することができた。この成果は 2016 年に数理論理学の代表的な査読付き国際誌である *Archive for Mathematical Logic* から出版された。次に、証明論の大家であったミンツ教授が 2014 年に逝去したことを受けて、国際誌上で *The Mints' Memorial Issue of IfCoLog Journal of Logics and Their Applications* という特集が組まれることになった。編集者のプロフソロフ教授からの依頼で論文を寄稿することになり、ミンツ教授との結果をより強い形式的体系に拡張した(先の共著論文では繰り返しを含まない \wedge_1 -包括原理のみを扱っていたが、ここでは繰り返しの場合を扱った)。この結果も査読プロセスの後に出版された。さらに、規則は基本的に順序数解析の文脈でのみ知られている手法であったが(報告者が気づいたように)直観主義の体系などにも応用可能であり、証明論と理論計算機科学をつなぐ研究として、規則をラムダ計算といわれる計算体系に応用する研究を京都大学数理解析研究所の照井准教授と開始した。その結果、規則をジラルのシステム F の非可述な部分体系に対して定式化することで、この体系の強正規化定理の証明論的な強さを決定した。これはエーリッヒ博士の博士論文で提示された問題に対する肯定的な解にもなっており、理論計算機科学分野でのトップ会議の一つである *Formal Structures for Computation and Deduction* の査読を通過して論文が出版された。

以上が当初の目的に対して得られた結果であるが、哲学的な研究、論理的な研究双方について予想以上の成果が出たとまとめられる。このことは査読付きの国際的な学術雑誌や国際会議での招待講演などに裏付けられている。さらに、本研究の目的は証明論的手法による直観主義の研究であり、以前には形式主義と直観主義の比較研究を行っていたが、これらの成果が元になって、日本が産んだ最大の論理学者である竹内外史の論理哲学の研究を開始することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Ryota Akiyoshi	4. 巻 10944
2. 論文標題 A Formalization of Brouwer's Argument for Bar Induction	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 WoLLIC 2018 25th Workshop on Logic, Language, Information and Computation	6. 最初と最後の頁 77--90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-662-57669-4_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ryota Akiyoshi	4. 巻 56
2. 論文標題 An Interpretation of Brouwer's Argument for Bar Induction via Infinitary Proof Theory	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the XXIII World Congress of Philosophy	6. 最初と最後の頁 5--9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-662-57669-4_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ryota Akiyoshi	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 "Proofs as Programs" Revisited	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Bulletin of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ryota Akiyoshi	4. 巻 4(4)
2. 論文標題 An Ordinal-Free Proof of the Complete Cut-Elimination Theorem for \mathcal{L}_{11} -CA + BI with the ω -rule	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Mints' memorial issue of the <i>IfCoLog Journal of Logics and their Applications</i>	6. 最初と最後の頁 867--884
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Ryota Akiyoshi	4. 巻 -
2. 論文標題 An Ordinal-Free Proof of the Complete Cut-Elimination Theorem for λ -CA + BI with the ω -rule	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Mints' memorial issue of the <i>Journal of Logics and their Applications</i>	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ryota Akiyoshi and Grigori Mints	4. 巻 55
2. 論文標題 An Extension of the Omega-Rule	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 593--603
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-016-0482-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ryota Akiyoshi and Kazushige Terui	4. 巻 52
2. 論文標題 Strong normalization for the parameter-free polymorphic lambda calculus based on the Omega-rule	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 1st International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2016)	6. 最初と最後の頁 5:1--5:15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4230/LIPIcs.FSCD.2016.5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ryota Akiyoshi and Yuta Takahashi	4. 巻 22
2. 論文標題 A uniform idea behind Gentzen's three consistency proofs (abstract)	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Bulletin of Symbolic Logic	6. 最初と最後の頁 382
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計14件(うち招待講演 10件/うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 On Takeuti's Finitism
3. 学会等名 Atelier : perspectives philosophiques sur des theories formelles (Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 Takeuti's Finitism Revisited
3. 学会等名 Theory Seminar (Swansea University, Department of Computer Science) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 Disagreement on Brouwer's Argument for Bar Induction
3. 学会等名 Workshop on Philosophy of Logic "Around Norm, Rule and Disagreement" (Keio University) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 秋吉亮太
2. 発表標題 形式主義の新展開に向けてー竹内外史を手がかりにー
3. 学会等名 第148回CAPEレクチャー(京都大学) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 秋吉亮太
2. 発表標題 ゲンツェンとシュッテのカット消去法
3. 学会等名 数学基礎論サマースクール (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 "Proofs as Programs" Revisited
3. 学会等名 Logic Colloquium 2018 (Udine, Italy) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 "Proofs as Programs" Revisited
3. 学会等名 French-Japanese Workshop "Philosophy of Logic and Mathematics" with special focuses on "Philosophy of Proofs" and the Study of Euclid's Elements (Keio University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 Gentle Introduction to the Omega-Rule: Part II
3. 学会等名 Atelier autour de la theorie de la dmonstration (IHPST, Paris) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 A Formalization of Brouwer's Argument for Bar Induction
3. 学会等名 Workshop "Logic and Philosophy of Mathematics" (Keio University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 Brouwer's Argument of Bar Induction Revisited
3. 学会等名 Colloquium in Mathematical Philosophy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 Opening Remarks
3. 学会等名 Workshop "Philosophy of logic and Mathematics - Towards Philosophy of Proofs" (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi
2. 発表標題 On Brouwer 's argument of bar induction
3. 学会等名 Workshop "Philosophy of logic and Mathematics - Towards Philosophy of Proofs" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi and Yuta Takahashi
2. 発表標題 Contentual and Formal Aspect of Gentzen's Consistency Proofs
3. 学会等名 The joint Conference of The 3rd Asian Workshop on Philosophical Logic (AWPL-2016) & The 3rd Taiwan Philosophical Logic Colloquium (TPLC-2016) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ryota Akiyoshi and Kazushige Terui
2. 発表標題 Strong normalization for the parameter-free polymorphic lambda calculus based on the Omega-rule
3. 学会等名 First International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Ryota Akiyoshi and Yuta Takahashi	4. 発行年 2017年
2. 出版社 Springer Singapore	5. 総ページ数 296 (6章を担当, 42頁)
3. 書名 Philosophical Logic: Current Trends in Asia	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----