

令和 2 年 5 月 26 日現在

機関番号：12301  
 研究種目：若手研究(B)  
 研究期間：2016～2019  
 課題番号：16K17557  
 研究課題名(和文) 多項式型と指数型の混合方程式として記述される種々のディオファントス問題の研究

研究課題名(英文) Diophantine problems related to polynomial-exponential equations

## 研究代表者

宮崎 隆史 (Miyazaki, Takafumi)

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：20706725

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：第一に、「二つ累乗数の和が累乗数に等しい」を表す三項型の不定方程式の研究を行った。特に、三項の全ての底数が固定される場合と、三項の一つが平方数であり残りの二項の底数が固定される場合である。前者については、Jesmanowicz予想等の未解決問題の特別な場合を研究し成果を得た。後者については、固定される二底数が特別な値を持つ場合にその方程式の解を決定した。第二に、「任意の二要素に対してその積に1を加えると平方数になる」という条件を満たす、ディオファントスの組と称される自然数の集合の構造について研究を行い、特に、任意のディオファントス三組のディオファントス四組への拡張方法の数の絶対評価を与えた。

## 研究成果の学術的意義や社会的意義

フェルマーの方程式に類似する項数の少ない不定方程式について研究を行った。特に、方程式の各項が累乗数で与えられる場合を扱い、より具体的には、三項型の指数型方程式やRamanujan-Nagell型方程式、さらには二つの特別な線形回帰数列の一致の決定問題に帰着される連立ベル方程式等について考察を行った。これらの研究の多くは、今日の整数論の発展に多大な影響を与えたフェルマーの最終定理の一般化問題「一般型フェルマー予想」に連なる、あるいは深く関わっている。この様な意味で、これらの研究は、整数論のさらなる発展に寄与するものと考えられる。

研究成果の概要(英文)：First, I studied a ternary Diophantine equation expressing that a sum of two powers is equal to a power. In particular, I considered not only the case where each of the base numbers on the equation is fixed, but also the case where one of the three terms is a square and the base numbers of the other terms are fixed. On the former case, I verified the conjecture of Jesmanowicz to be true and had some results on other related unsolved problems. On the latter one, I had some results on Ramanujan-Nagell type equations having very particular conditions on its parameters. Second, I studied the sets of natural numbers with the property that the product of any two elements in the set increased 1 is a perfect square, so called Diophantine tuples. As joint works of Y. Fujita and M.Cipu, I showed that any given Diophantine triple can only be extended to a Diophantine quadruple (in some sense) at most 8 ways.

研究分野：代数学・整数論・不定方程式

キーワード：指数型不定方程式 Jesmanowicz予想 ディオファントスの組 連立ベル方程式 Bakerの手法 ベキ剰余理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19, F - 19 - 1, Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

ディオファントス近似論に関連して現れる不定方程式の多くは、数体上で定義される  $S$  単数方程式であり、特に有理数体における二変数の場合である。この内、最も簡単な例はピライ型の方程式  $A^x - B^y = C$  と純指数型方程式  $A^x + B^y = C^z$  である。ここで、 $A, B, C$  は与えられた自然数である。これらの研究においては、解析学に基づくディオファントス近似の理論が効果的であり、方程式の整数解の情報を取り出すことが出来る。実際、W.M.Schmidt による代数的数の同時有理近似に関する部分空間定理、A.Baker による対数の一次形式の理論等が、解の個数や大きさの上限計算に有効である。しかしながらそれらの大理論だけでは方程式の解を明確に記述するには不十分であり、abc 予想を仮定しても状況はさほど変わらず、多くの課題が残されている。このことは、近年発展が著しい多項式型と指数型の混合型方程式の研究においても同様である。

## 2. 研究の目的

1. で述べた三項型の純指数型不定方程式や多項式型と指数型の混合型方程式を考察対象とする。一般にこれらの方程式の解構造を調べることは極めて難しい。そこで特別な場合として、古典的に知られている様々な整数論の未解決問題等に現れている不定方程式等を考察することで、より一般的な場合の解構造の概形を予測し、その有限性の境界条件等を探る。特に具体的に考察する対象は、三項型の純指数型方程式の分野において未解決である、底数がピタゴラス数を成す場合に関する Jesmanowicz 予想や、その一般化問題として提出された寺井伸浩氏の予想、さらにはラマヌジャン・ナーゲル型の方程式  $X^2 + D^m = p^n$  である。関連して二つの線形回帰数列の一致の問題に帰着されるディオファントスの組の構造決定問題にも取り組む。

## 3. 研究の方法

- (1) 三項型の純指数型方程式  $A^x + B^y = C^z$  について述べる。この方程式の解を決定するためには底数  $A, B, C$  の値を強く制限する必要がある。また指数変数の整除性を調べることが多くの場合で重要である。そこで、指数変数の偶奇性さらにはより一般的な整除に関する性質を調べる方法の確立に向けて考察を行う。偶奇性を調べる研究においては二次の代数体の理論に現れる平方剰余の相互法則による計算法が重要な役割を果たしている。そこで、その高次元化に当たる  $N$  乗剰余による計算法を、数の  $N$  乗根を添加した代数体の理論を用いて考案し、それによって得られることが期待される指数変数の  $N$  を法とする場合の剰余の情報を使い、底数がピタゴラス数の様な代数関係式を満たす場合から生ずる方程式族の解構造の調査を行う。
- (2) ラマヌジャン・ナーゲル型の方程式  $X^2 + D^m = p^n$  について述べる。これについても方程式の解を決定するためには、底数  $D, p$  の値を強く制限する必要がある。特に  $p$  が素数である場合を扱う。 $D, p$  が特別な関係にある場合には、Dem' jankenko によるある二次の二変数不定方程式の解の構造を示す成果を適用し、元の方程式の解の決定を試みる。合わせて、線形回帰数列に関する Bilu-Harnot-Voutier の原始素因数の定理の応用も考える。
- (3) 最後に、ディオファントスの組みについて述べる。自然数の集合は、その任意の 2 要素の積に 1 を加えたものが平方数になるとき、ディオファントスの組と呼ばれる。その定義の仕方から、実際に 2 組, 3 組, 4 組と構成するためには連立ペル方程式を扱う必要がある。

ディオファントスの組の構造に関する「任意のディオファントスの3組は、一意的に4組に拡張される」という Arkin, Hoggatt, Strauss の予想と、「ディオファントスの5組は存在しない」という予想等が, A.Dujella 氏, 藤田育嗣氏を始めとする研究者たちに活発に研究されている. 藤田育嗣氏と共同研究を行い, 既に氏との共同研究で得られている「任意の3組を4組に拡張する仕方は高々11通りである」という命題の改良を行う. そのためには, 考えている連立ペル方程式から生ずる線形回帰数列たちの間の関係をより細かく調査し, 合わせて特別な代数的数のディオファントス近似を用いた応用も考える.

#### 4. 研究成果

- (1) 立方剰余理論の応用について考察し, それに適する Eisenstein 数に起因する方程式族を考え, その特別な部分族を解くことが出来た. これはピタゴラス数に関する Jesmanowicz 予想について活発に考察されている, 方程式のパラメータに合同条件だけを付する場合に関する既知の研究成果との類似物とみなすことが出来る. この成果を筑波大学で行われた Diophantine Analysis and Related Fields 2019 にて口頭発表を行い, その論文を査読付き学術誌から出版させることができた. この研究手法はより高次の剰余理論への拡張が期待される.
- (2) 3. の(2)で述べたように,  $D, p$  が特別な関係にある場合に, Dem'janenko の成果を適用し, 方程式の解を決定することが出来た. またその論文を査読付き学術誌から出版させることができた.
- (3) M.Cipu 氏, 藤田育嗣氏との共同研究において, 「任意のディオファントス3組をディオファントス4組に拡張する仕方は高々8通りである」ことを証明することが出来た. また, この共同研究中に得た知見に基づき, 整数係数の1変数多項式環上において, デイオファントスの組に関わる特別な連立ペル方程式の解を明示的に決定することができた. これは, A.Dujella 氏と C.Fuchs 氏による Arkin, Hoggatt, Strauss の予想の整数係数多項式環類似の結果の拡張になっている. これらの研究成果はそれぞれ査読付き学術誌から論文を出版させることができた.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 E. Kizildere, T. Miyazaki, G. Gokhan	4. 巻 42
2. 論文標題 On the Diophantine equation $((c+1)m^2+1)^x+(cm^2-1)^y=(am)^z$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Turkish Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 2690-2698
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3906/mat-1803-14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Takafumi Miyazaki	4. 巻 186.1
2. 論文標題 Contributions to some conjectures on a ternary exponential Diophantine equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Acta Arithmetica	6. 最初と最後の頁 1-36
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/aa8656-2-2018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takafumi Miyazaki	4. 巻 25
2. 論文標題 On Terai's exponential equation with two finite integer parameters	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Notes Number Theory Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 84-107
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7546/nntdm.2019.25.1.84-107	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Takafumi Miyazaki	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Coincidence between two binary recurrent sequences of polynomials arising from Diophantine triples	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1502179292	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takafumi Miyazaki, Nobuhiro Terai	4. 巻 95
2. 論文標題 A study on the exponential Diophantine equation $a^x+(a+b)^y=b^z$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Publicationes Mathematicae Debrecen	6. 最初と最後の頁 19-37
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) DOI: 10.5486/PMD.2019.8283	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mihai Cipu, Yasutsugu Fujita, Takafumi Miyazaki	4. 巻 14
2. 論文標題 On the number of extensions of a Diophantine triple	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 899-917
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793042118500549	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Attila Berczes, Lajos Hajdu, Takafumi Miyazaki, Istvan Pink	4. 巻 8
2. 論文標題 On the diophantine equation $1+x^a+z^b=y^n$	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 145-154
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Yasutsugu Fujita, Takafumi Miyazaki	4. 巻 370
2. 論文標題 The regularity of Diophantine quadruples	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3803-3831
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1090/tran/7069">https://doi.org/10.1090/tran/7069</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takafumi Miyazaki	4. 巻 45
2. 論文標題 A polynomial-exponential equation related to the Ramanujan-Nagell equation,	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 601-613
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-016-9878-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takafumi Miyazaki	4. 巻 62
2. 論文標題 Application of cubic residue theory to an exponential equation concerning Eisenstein triples	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie	6. 最初と最後の頁 305-312
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計4件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 Coincidence between two sequences of polynomials arising from Diophantine triples
3. 学会等名 Conference on Diophantine m-tuples and Related Problems II (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 Application of cubic residue theory to a special type of unit equation concerning Eisenstein triples
3. 学会等名 Diophantine Analysis and Related Fields 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 On Terai ' s exponential equation with two finite integer parameters
3. 学会等名 Analytic Number Theory and Related Areas ( 国際学会 )
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 Extension of Dem ' j anenko ' s classical work on a quadratic Diophantine equation and its applications
3. 学会等名 Diophantine Analysis and Related Fields 2017 ( 国際学会 )
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<a href="http://www.sci.st.gunma-u.ac.jp/staff_page/sci_miyazaki.htm">http://www.sci.st.gunma-u.ac.jp/staff_page/sci_miyazaki.htm</a>
---

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考