

令和 2 年 5 月 31 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17562

研究課題名(和文)実簡約リー群の表現の誘導と制限

研究課題名(英文)Inductions and restrictions for representations of real reductive Lie groups

研究代表者

大島 芳樹(Oshima, Yoshiki)

大阪大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：10746936

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：Lie群のユニタリ表現に関して表現の指標、誘導や制限等の操作と軌道の方法との関連を研究した。特に、半単純軌道に対応する表現やある種の群の極小表現のHarish-Chandra指標のFourier変換と余随伴軌道(半単純軌道または極小ベキ零軌道)との関係式を得た。また、等質空間のPlancherel測度の台の漸近的挙動に関する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学や自然科学に現れる対称性は、数学において群の作用という言葉で記述され、それを線型化したものが群の表現である。その中で連続的な対称性を扱うのがLie群である。特に、表現の指標、またLie群とその部分群を与えられたとき、部分群の表現からもとの表現を構成する誘導という操作、またもとの群の表現から部分群の表現を得る制限という操作について理解することは、Lie群の表現論や調和解析における基本的テーマである。本研究ではこれらのLie群の表現に関する事柄について、軌道の方法とよばれる、Lie環の双対空間への群の作用と関連づけて新たな情報を得た。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is to understand the relationship between characters, inductions and restrictions of unitary representations and the orbit method for Lie groups. We obtained a formula for the Fourier transform of Harish-Chandra characters of unitary representations corresponding to semisimple orbits and minimal representations in terms of the corresponding coadjoint orbits. We also obtained a result about the asymptotic support of Plancherel measures for homogeneous spaces.

研究分野：表現論

キーワード：表現論 Lie群 誘導表現 分岐則 ユニタリ表現 指標 簡約群

## 1. 研究開始当初の背景

一般に群とその部分群が与えられたとき、小さな群の表現から大きな群の表現を構成する”誘導”, また大きな群の表現から小さな群の表現を作る”制限”という操作がある. 表現論において, 表現の誘導と制限を具体的に記述することは基本的かつ重要な問題である. リー群の無限次元表現について, 明示的に表現の誘導や制限の既約分解が得られているのはごく限られたケースである.

## 2. 研究の目的

本研究では  $G$  と  $H$  を実簡約リー群として, そのユニタリ表現の誘導と制限を考える.  $H$  の既約ユニタリ表現が与えられると, 付随する商空間  $G/H$  上のベクトル束の  $L^2$  切断の空間に  $G$  が作用し,  $G$  のユニタリ表現を得る. これは誘導表現とよばれる. 一般に実簡約リー群の任意のユニタリ表現は, 直積分を用いて既約ユニタリ表現に分解できることが知られているので, 誘導表現がどのように既約表現に分解するかという問がある. 同様に  $G$  の既約ユニタリ表現が与えられると,  $G$  の作用を  $H$  に制限することで  $H$  のユニタリ表現を得る. これを制限とよぶ. 表現の制限についてもやはりどのように既約分解するかという問がある. 表現論において, 表現の誘導と制限を具体的に記述することは基本的かつ重要な問題である.

一方で, Kirillov によって導入された軌道法の哲学によれば, リー群の既約ユニタリ表現とリー環の余随伴軌道との間に対応がある. 誘導表現や制限の既約分解の具体形についての情報を, 軌道の言葉を使って表すことが本研究の目的である.

## 3. 研究の方法

軌道法の哲学によれば, リー群の既約ユニタリ表現とリー環の余随伴軌道に一对一対応がある. 実際  $G$  が連結で単連結な冪零リー群のとき, Kirillov は軌道と表現の間の完全な一对一対応を与え, 誘導や制限についても軌道の言葉で明快に記述された. しかし  $G$  が実簡約リー群の場合には  $G$  の既約ユニタリ表現すべてをこの枠組みに入れるのは困難である. そこで, 考える表現のクラスを適切な範囲に絞ることで軌道と表現の対応を与えることを考える. たとえば閉軌道に対応する表現については対応する表現を構成できることが知られており, それらは放物型部分リー環の 1 次元表現からのコホモロジカルな誘導で与えられる. このような閉軌道に対応する表現が, 考える表現のクラスの候補になる. 表現の制限と軌道との関係については Kirillov, Duflo 等によって研究されているが, 実簡約リー群について現在知られているのは, 表現の分岐則が何らかの方法で求められた場合にその公式と軌道のデータから計算される式とを比較して一致していることをみるというタイプの結果である. 本研究では, まず申請者による旗多様体上の  $D$  加群を援用した Zuckerman 加群についての分岐則の結果を軌道を用いて解釈し, より一般の表現の制限および誘導が軌道法によってどう記述されるかを予測する. そして, 表現の旗多様体上の  $D$  加群による実現を用いて, より一般の分岐則・誘導表現の分解を余随伴軌道と結びつける.

## 4. 研究成果

### (1)

半単純軌道に対応する表現, メタプレクティック群の極小表現 (Segal-Shale-Weil 表現) および不定値直交群の極小表現の場合に, Harish-Chandra 指標の Fourier 変換と余随伴軌道 (半単純軌道または極小ベキ零軌道) との関係式を得た. より正確に述べると, 一般に既約認容表現の Harish-Chandra 指標の Fourier 変換は, 表現と対応する旗多様体上の同変層の特性サイクルのねじれモーメント写像による像で記述されることが知られているが, そのサイクルを上記の表現の場合に具体的に記述し, 軌道の方法で対応する余随伴軌道と関連づけた (半単純軌道の場合は Benjamin Harris 氏と共同). 半単純軌道に対応する表現と不定値直交群の極小表現の場合には, 指標側のサイクルから余随伴軌道に自然な写像があり, ファイバー束の構造をもつことがわかった. 一方, メタプレクティック群の極小表現については, 余随伴軌道の閉包 (この場合は極小ベキ零軌道と原点の和) に写像があることがわかった. これらの指標についての結果を, 実簡約リー群のユニタリ表現の誘導や制限についての議論に応用することを目的としている. また, 小林による表現の制限の離散分解性と余随伴軌道の射影写像 (部分リー群に関するモーメ

ント写像)の固有性との関係についても調べた。

(2)

自明表現からの誘導表現の零化イデアルについての結果を得た。一般に  $G$  を実簡約代数群、 $H$  をその部分代数群としたときに、 $H$  の自明表現からの誘導は等質空間  $G/H$  上の関数空間への表現になる。この表現を、 $G$  の Lie 環の普遍包絡環の表現とみなしたときの零化イデアルを考える。 $H$  がユニモジュラーの場合に、このイデアルが、ある無限個の一般 Verma 加群の零化イデアルの共通部分を含むことがわかった。証明には、ユニモジュラー群は観測可能 (observable) 部分群となること、および有限次元表現の誘導の既約分解に関する補題を用いた。またモーメント写像の像についての Knopp の結果により、上述の一般 Verma 加群は  $G/H$  のモーメント写像の像で記述できることがわかる。これは軌道の方法から予見されることと整合的である。さらに零化イデアルの情報を用いることで、誘導表現の既約分解に現れる表現は、ある部分旗多様体上のねじれ  $D$  加群の大域切断として実現できることがわかった。大雑把に言えば、 $H$  が  $G$  の比較的大きな部分群であるとき、誘導表現の既約分解に現れる表現は、ある程度退化しているということを意味している。この結果を(1)の指標の結果についての結果と合わせることで、誘導表現の既約分解についてより精密な情報が得られることを目的としている。

(3)

リー群の等質空間の Plancherel 測度の台の漸近的挙動に関する結果を得た。 $G$  を実簡約リー群、 $H$  を局所代数的な  $G$  の部分群とする。 $H$  がユニモジュラーであるとき  $G/H$  には  $G$  不変な測度が存在し、Hilbert 空間  $L^2(G/H)$  への  $G$  の自然な作用により  $G$  のユニタリ表現を得る。この表現の既約表現への直積分分解は  $G$  のユニタリ双対上の測度 (Plancherel 測度) を用いて与えられる。まず(2)の零化イデアルについての情報から、Plancherel 測度の台のうち "漸近的に generic" な部分は、ある部分旗多様体のねじれ  $D$  加群の大域切断として得られることがわかる。ただしこの部分旗多様体を定める放物型部分リー群の Levi 成分は、 $G/H$  の余接束のモーメント写像による像の generic な元の固定部分群と共役である。この結果から Plancherel 測度の台に現れる表現のうちの "generic" な部分は、上記の Levi 成分と共役な固定部分群を持つ元からなる半単純軌道と対応する既約ユニタリ表現からなることが帰結される。

さらに(1)の半単純軌道に対応する表現の指標の公式を合わせることで次の結論を得る： $G/H$  の余接束のモーメント写像による像と、Plancherel 測度の台に現れる表現に対応する余随伴軌道の漸近的錐とは、generic 部分に制限すると一致する。

例として、等質空間  $GL(n, \mathbb{R})/GL(m, \mathbb{R})$  の余接束のモーメント写像による像を計算し、 $L^2(GL(n, \mathbb{R})/GL(m, \mathbb{R}))$  の既約分解に現れる表現についての情報を得た。

また系として、 $G/H$  の離散系列表現の存在のための十分条件が得られた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Yoshiki Oshima
2. 発表標題 On the annihilator ideal of induced representations
3. 学会等名 Seminar at University of Paderborn
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshiki Oshima
2. 発表標題 漸近的Plancherel公式について
3. 学会等名 Workshop on "Actions of Reductive Groups and Global Analysis"
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshiki Oshima
2. 発表標題 On the asymptotic support of Plancherel measures for homogeneous spaces
3. 学会等名 The Legacy of Joseph Fourier after 250 years (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshiki Oshima
2. 発表標題 On the asymptotic support of Plancherel measures for homogeneous spaces
3. 学会等名 Representation theory of reductive Lie groups and algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiki Oshima
2. 発表標題 Characters of minimal representations and minimal nilpotent orbits
3. 学会等名 表現論とその周辺分野の広がり (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshiki Oshima
2. 発表標題 ユニタリ表現の指標と軌道の方法
3. 学会等名 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshiki Oshima
2. 発表標題 The orbit method and characters of representations for real reductive groups
3. 学会等名 Quantum geometric and algebraic representation theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshiki Oshima
2. 発表標題 誘導表現の零化イデアルについて
3. 学会等名 Langlands and Harmonic Analysis (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大島芳樹
2. 発表標題 実簡約Lie群のユニタリ表現と軌道法
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 大島芳樹
2. 発表標題 The orbit method and characters of representations for real reductive groups
3. 学会等名 Harmonic analysis on Lie groups and group algebras of locally compact groups（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考