

令和 2 年 6 月 25 日現在

機関番号：12605

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17563

研究課題名（和文）量子アフィン代数の有限次元表現の古典極限に関する研究

研究課題名（英文）Research on the classical limits of finite-dimensional representations over a quantum affine algebra

研究代表者

直井 克之 (Naoi, Katsuyuki)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：40647898

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：Kirillov-Reshetikhin加群と呼ばれる重要な量子アフィン代数の有限次元単純加群の族に対し、そのテンソル積の古典極限がどのような加群であるかを解析し、それぞれのテンソル因子の古典極限のフュージョン積として構成されることを明らかにした。  
また、Kirillov-Reshetikhin加群が結晶基底を持つ、というのは古くから知られている重要な予想である。この予想に対し、 $G_2(1)$ 型、 $D_4(3)$ 型の場合、およびnear-adjointと呼ばれる特別な族の場合で証明を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子アフィン代数の有限次元既約加群のテンソル積の古典極限が、テンソル因子の古典極限のテンソル積と一致しないことは古くから知られていたが、その加群に関する研究はほとんど行われていなかった。今回の研究では非常に重要なKirillov-Reshetikhin加群の場合に、この方向性で新たな興味深い研究結果が得られた。その意義は高いと考えている。

またKirillov-Reshetikhin加群が結晶基底を持つ、という古くからある重要な予想を、様々な場合に証明できたことも、意義は高いと考えている。

研究成果の概要（英文）：We have studied the classical limit of the tensor product of Kirillov-Reshetikhin modules, which is an important family of finite-dimensional simple modules over a quantum affine algebra, and it turned out that the module is constructed as the fusion product of the classical limits of the tensor factors.

In addition, it has been conjectured for a long time that Kirillov-Reshetikhin modules have crystal bases. We gave a proof to this conjecture in types  $G_2(1)$  and  $D_4(3)$ , and for the special family called near adjoint.

研究分野：表現論

キーワード：量子アフィン代数 Kirillov-Reshetikhin加群 結晶基底

## 1. 研究開始当初の背景

(1) **量子アフィン代数**は、アフィン Lie 代数の普遍包絡環を  $q$  変形することで得られる、結合的代数である。量子アフィン代数の有限次元加群は完全可約ではなく、非常に豊富な構造を有している。またそれらは可積分系、幾何学的表現論、組合せ論、など様々な分野と関連を持つため、近年盛んに研究がなされている。しかしその一方で、既約加群の次元や指標といった最も基本的な構造すら、特別な例を除くといまだ分かっていない。

(2) 量子アフィン代数の有限次元加群が与えられたとき、変数  $q$  を 1 に特殊化することで、アフィン Lie 代数上の加群を得ることができる。これを**古典極限**という。古典極限を調べることで、元の加群の次元、指標、定義関係式など様々な情報を得ることができる。一方で、アフィン Lie 代数は量子アフィン代数より遥かに構造が簡単な代数であるため、古典極限の方が元の加群よりずっと解析が容易である。これが古典極限を考える利点である。この古典極限を調べることで元の加群の情報を得る、という手法は 2000 年ごろ Chari-Pressley により始められ、現在まで様々な方向性での研究がなされてきている。さらに古典極限には、元の加群には無かった次数付けを与えることができる場合がある。研究代表者は特別な場合に、この次数付けを用いて  $X=M$  予想に証明を与えた。この結果により、古典極限はさらに注目を集めるようになった。

(3) 量子アフィン代数の有限次元既約加群のテンソル積の古典極限が、テンソル因子の古典極限のテンソル積と一致しないことは古くから知られていた。しかしながら、その加群がどのような加群であるか、ということについては、重要な問題であるにもかかわらず、ほとんど研究結果が得られていない状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、様々な量子アフィン代数の有限次元加群に対しその古典極限を調べることである。特に次数付けについて詳しく調べるとともに、その新たな応用を探ることが重要である。古典極限の次数付けは様々な対象と関連を持つことが分かってきており、実際に応用として  $X=M$  予想の解決へとつながる、等の結果も得られていることから、より一般の加群についても多くの応用が期待できるのである。

## 3. 研究の方法

本研究では、「短完全列を用いる」という新たな量子アフィン代数の有限次元加群の古典極限を調べる手法を用いる。量子アフィン代数の有限次元加群の短完全列があるとき、各加群の古典極限についても同様の短完全列が得られる。そこで元の短完全列に現れる 3 つの加群のうち、2 つについてその古典極限がよく分かっているならば、得られる古典極限の短完全列を用いて残り一つの加群の古典極限についても、様々な性質を調べることができるはずである。

量子アフィン代数の有限次元加群と、団代数との間には数多くの興味深い関連が知られており、この関連を用いることで、量子アフィン代数の有限次元加群が満たす数多くの短完全列を見つけることができる。このようにして見つかった短完全列に対し、上で述べた手法を適用していく、というのが本研究の手法である。

## 4. 研究成果

(1) Kirillov-Reshetikhin 加群と呼ばれる重要な量子アフィン代数の有限次元単純加群の族に対し、そのテンソル積の古典極限を解析した。このテンソル積の古典極限は、各 Kirillov-Reshetikhin 加群の古典極限のテンソル積と同型とはならないことが以前から知られていたが、一方でこの加群がどのような加群であるかは、重要な問題であるにもかかわらずほとんど何も知られていない状況であった。

研究代表者はこのテンソル積の古典極限を、各テンソル因子の古典極限から構成する方法を発見した。それはフュージョン積と呼ばれる構成法であり、もともとは共形場理論の文脈で Feigin-Loktev により定義された概念である。量子アフィン代数の表現論と共形場理論という、全く異なる分野の間の興味深い関係を見つけることができた、という点からも本研究は意義があると考えている。

(2) Kirillov-Reshetikhin 加群が結晶基底を持つ、というのは古くから知られている重要な予想であるが、一般にはいまだ未解決である。研究代表者はこの予想に対し、 $G_2(1)$ 型と  $D_4(3)$ 型と呼ばれるランクの小さい場合で、証明を与えた。これは Kirillov-Reshetikhin 加群が重複度 1 でないような型で、すべての Kirillov-Reshetikhin 加群に対し予想の証明を与えた初めての結果であり、大変画期的なものであった。証明に使われた手法は、レベル (Kirillov-

Reshetikhin 加群のパラメータの一つ) が小さい Kirillov-Reshetikhin 加群を用いてレベルが大きいものを構成し、その構成を用いて帰納法による議論を用いてる証明を行う、というものであった。

(3) (2)の結果をさらに推し進めることで、すべての型において、node (レベルとは異なる Kirillov-Reshetikhin 加群のパラメータ) が near-adjoint と呼ばれる特別なものである場合に、Kirillov-Reshetikhin 加群の結晶基底の存在証明を与えた。これは Queensland 大学の Scrimshaw 氏との共同研究である。証明には(2)の場合の帰納法を用いた手法に加えて、端ウエイト加群の大域基底の理論を援用した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Katsuyuki Naoi	4. 巻 512
2. 論文標題 Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals of type $G_2^{(1)}$ and $D_4^{(3)}$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 47-65
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2018.06.029">https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2018.06.029</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 直井克之	4. 巻 4
2. 論文標題 Kirillov-Reshetikhin加群の結晶擬基底の存在について	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第4回Algebraic Lie Theory and Representation Theory報告集	6. 最初と最後の頁 171-178
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 直井克之	4. 巻 2039
2. 論文標題 テンソル積と古典極限を取る操作の非可換性	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 1-10
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Katsuyuki Naoi	4. 巻 2017
2. 論文標題 Tensor products of Kirillov-Reshetikhin modules and fusion products	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 5667-5709
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1093/imrn/rnw183">https://doi.org/10.1093/imrn/rnw183</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 直井克之	4. 巻 2
2. 論文標題 量子ループ代数の加群におけるテンソル積と古典極限を取る操作の非可換性について	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 第二回Algebraic Lie Theory and Representation Theory報告集	6. 最初と最後の頁 218-227
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 直井克之
2. 発表標題 Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for the near adjoint nodes in exceptional types
3. 学会等名 Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 直井克之
2. 発表標題 Existence of KR crystals in types $G_2^{(1)}$ , $D_4^{(3)}$ and $E_6^{(1)}$
3. 学会等名 第4回Algebraic Lie Theory and Representation Theory
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Katsuyuki Naoi
2. 発表標題 Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals of type $G_2^{(1)}$ and $D_4^{(3)}$
3. 学会等名 Infinite Analysis 17 -Algebraic and Combinatorial Aspects in Integrable Systems- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 直井克之
2. 発表標題 Noncommutativity between operations of tensor product and classical limit on modules over a quantum loop algebra
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 直井克之
2. 発表標題 Noncommutativity between the operations of tensor product and taking a classical limit
3. 学会等名 RIMS研究集会「リー型の組合せ論」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 直井克之
2. 発表標題 量子ループ代数の有限次元表現と古典極限
3. 学会等名 農工大数学セミナー2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 直井克之
2. 発表標題 $U_q(\mathfrak{lg})$ 加群に対するテンソル積と古典極限を取る操作の非可換性について
3. 学会等名 日本数学会2017年度年会無限可積分系セッション一般講演
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

直井克之のホームページ  
<http://web.tuat.ac.jp/~naoik/index.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----