

令和 2 年 7 月 6 日現在

機関番号：32619

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17568

研究課題名（和文）テンソル圏における積分・フーリエ変換・指標の理論の研究

研究課題名（英文）Study of integrals, Fourier transforms and characters in tensor categories

研究代表者

清水 健一 (Shimizu, Kenichi)

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：70624302

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：有限次元ホップ代数の理論における基本的な道具立て（積分，フーリエ変換，指標など）を有限テンソル圏へ一般化し，その基礎理論を構築した。また，作用関手を用いて，有限テンソル圏におけるある種の（余）エンドを体系的に取り扱うための手法も確立した。そのような基礎理論の応用として，有限リボン圏のモジュラー性の特徴づけ，モジュラーテンソル圏のHochschild cohomologyへのモジュラー群の射影的作用，余加群代数の表現圏の相対セール関手の表示，準ホップ代数の表現圏における修正トレースおよび関連する代数的構造の表示などの結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究では，有限次元ホップ代数の研究における基本的な道具立てが非常に一般的な設定のもとで使えるように拡張された。数理論理学や低次元トポロジーの研究を動機として，“非半単純”なモジュラーテンソル圏の研究が活発化している。本研究の成果は，このようなテンソル圏の研究の基礎として重要であろう。モジュラー性の特徴づけ，相対セール関手と関連する代数的構造，修正トレースに関する結果などは，テンソル圏や関連する分野における今後の応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：We extended fundamental tools in the theory of finite-dimensional Hopf algebras (integrals, Fourier transforms and characters) to the setting of finite tensor categories and then established basic theory for them. By using the action functor, we established a method for dealing with certain (co)ends in finite tensor categories. As applications, we obtained some characterizations of modularity of ribbon finite tensor categories, a projective action of the modular group on the Hochschild cohomology of a modular tensor category, an explicit expression of the relative Serre functor for a comodule algebra, and explicit expressions of the modified trace and related algebraic structures in the representation category of a quasi-Hopf algebra.

研究分野：代数学

キーワード：ホップ代数 テンソル圏 モジュラーテンソル圏

様式 C - 19, F - 19 - 1, Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

モジュラーテンソル圏は二次元の有理的共形場理論や三次元の位相的場の量子論の研究から見出された代数的構造であり、形式的にはある種の有限性と非退化性を満たす半単純リボン圏として定義される。リュバシェンコは1990年代にモジュラーテンソル圏の“非半単純”な一般化を定式化し、そのような圏から閉曲面の写像類群の射影表現や三次元多様体の不変量が得られることを示している。この結果は、数理論理学、低次元トポロジー、表現論などの研究者から見て非常に興味深いものであった。例えば、共形場理論の観点からは、リュバシェンコの意味での“非半単純”モジュラーテンソル圏は非有理的な共形場理論と関連するのではないかと期待されていた。低次元トポロジーの観点からは、それは新しい位相不変量を得るための枠組みとして期待されていた。ホップ代数の表現論においてもモジュラーテンソル圏は重要であったから、非半単純なモジュラーテンソル圏を使うことでホップ代数の表現論における新しい手法が見出されるのではないかと期待があった。

## 2. 研究の目的

研究代表者によるテンソル圏に関する研究を振り返ることにより、ホップ代数の理論における様々な手法・概念をテンソル圏へ一般化するという必要性が明らかになってきた。この研究は、有限次元ホップ代数の指標理論、積分理論およびフーリエ変換を有限テンソル圏へと拡張し、その基礎理論を確立することを目的とした。さらに、そのような基礎理論に基づき、有限次元ホップ代数の表現論において知られている結果を有限テンソル圏へと一般化することや、そのような結果を位相的場の量子論や共形場理論などへの応用を与えることも目的であった。

## 3. 研究の方法

本研究計画の前から、有限次元ホップ代数の指標や積分の理論はその表現圏と Yetter-Drinfeld (YD) 圏との間の随伴対と関係していることが分かっていた。同様の随伴対は有限テンソル圏とその中心との間に定義できるから、その随伴対を用いることによってホップ代数の指標理論や積分理論を有限テンソル圏へと一般化できるのではないかと期待できる。この研究では、実際にその随伴対を近年研究が進んできているホップモナドやテンソル圏上の加群圏の理論を用いて調べることで上記の目的を達成した。

## 4. 研究成果

### (1) 非半単純モジュラーテンソル圏の特徴づけ

研究の背景において触れたリュバシェンコの“非半単純”モジュラーテンソル圏は、様々な観点から興味深い概念であると思われるのであるが、その定義の複雑さや、それに由来する例の少なさなどからあまり研究が進んでいなかった。これに関して、研究代表者は2016年のはじめにモジュラー性の特徴づけに関するプレプリントを公開した（これは正確には本研究課題の期間が始まる前のことだが、このプレプリントを出版するために本研究費を使用しているため、ここに記すことにする）。具体的には、有限リボン圏  $C$  がリュバシェンコの意味でモジュラーであること、 $C$  が Etingof-Nikshych-Ostrik の意味で分解可能 (factorizable) であること、竹内光弘によるリボンホップ代数に対する定義を拡張する意味で  $C$  が弱分解可能 (weakly factorizable) であること、 $C$  の Müger center が自明であることがすべて同値であることが証明された。特に Müger center を用いたモジュラー性の特徴づけは簡潔で分かりやすく、後に、他の研究者により、この結果を使って新しいモジュラーテンソル圏の例も構成された。これらの結果は、国内外の多数の研究集会や、日本数学会の特別講演 (2018年) でも発表している。同プレプリントは、最終的には *Advances in Mathematics* 誌から出版された (2019)。また、この結果に関するサーベイも出版された (*Proceedings of the Meeting for Study of Number Theory, Hopf algebras and Related Topoics*, 2019)。

### (2) テンソル圏の積分理論とその応用

有限次元ホップ代数のユニモジュラー性の定義を拡張する形で、有限テンソル圏のユニモジュラー性が定義されている。ユニモジュラーな有限テンソル圏における積分は、研究代表者が石井・増岡によるユニモジュラーホップ代数を用いたハンドル体結び目の不変量の構成を圏論的に拡張するために導入され、有限テンソル圏の指標理論などに応用されていた。本研究では、ユニモジュラー性の仮定を外し、一般の有限テンソル圏に対して積分などを定義し、それを用いることで有限次元ホップ代数に対して知られていた様々な結果を有限テンソル圏へと拡張できることを示した (*Algebra and Representation Theory*, 2019)。具体的には、有限テンソル圏  $C$  に対し、その中心  $Z(C)$  と  $C$  との間の随伴をホップモナドの理論を用いて詳しく調べ、その応用として  $C$  の圏論的積分および圏論的余積分を定義した。そして、それらをもちいることにより、以

下のような結果を得ている。

Lorenz による随伴表現, 積分, およびカルタン行列の階数の間の関係性の一般化  
Kashina-Montgomery-Ng による有限次元ホップ代数の indicator を有限テンソル圏に対して  
拡張し, そのゲージ不変性の概念的な証明を得た。

### (3) 加群圏の相対セール関手

Fuchs, Schaumann, Schweigert は, 有限テンソル圏  $C$  上の完全  $C$ -加群  $M$  に対して  $M$  の相対セール関手を定義した。これは有限テンソル圏の様々な問題に対して有効であることが知られていたが,  $C$  が有限次元ホップ代数の表現圏の場合でさえも具体的な表示は良くわかっていなかった。本研究では,  $C$  が有限次元ホップ代数  $H$  の表現圏,  $M$  が  $H$  上の余加群代数の表現圏の場合に  $M$  の相対セール関手と関連する同型射を  $H$  の積分などを用いて具体的に表示することに成功した。さらに, この結果を用いて,  $M$  のピボタル構造の存在性や, 内部  $\text{End}$  が対称フロベニウス代数になる条件についても与えた。以上の結果はアメリカ数学会などの研究集会で発表済みであり, また, arXiv:1904.00376 として公開されている。

### (4) 積分の具体的な表示

テンソル圏における修正トレースや圏論的余積分は位相不変量の構成などにおいて有用であると考えられるようになってきているが, その具体的な表示が与えられている例は少ない。柴田大樹氏との共同研究として, 有限次元準ホップ代数の表現圏と  $YD$  加群の間の随伴について研究し, 以下のような結果を得ている。

有限次元準ホップ代数  $H$  の表現圏の随伴代数  $A$  が Bulacu, Caenepeel, Panaite の構成した  $YD$  圏におけるある可換代数と同じものであることを示した。

$H$  がユニモジュラーである場合に随伴代数はフロベニウス構造を持つことが知られているが, その構造を  $H$  の積分および余積分を用いて明示的に表示した。

$H$  の表現圏における  $m$ -twisted 修正トレース (ただし  $m$  は  $H$  のモジュラー関数) を  $H$  の余積分を用いて明示的に表示した。

以上の結果は国内の研究集会において発表済みであり, また, arXiv:1812.03439 として公開されている。

### (5) 作用関手の随伴によるある種のエンドと余エンドの構成

有限テンソル圏におけるある種のエンドおよび余エンドの研究を行った。この研究における重要な観察は, 随伴代数や, リュバシェンコの理論において用いられるあるホップ代数を含む多くの(余)エンドは, テンソル圏の作用から自然に生じる随伴により関手的に構成することができるというものである。この観察により, これまで技術的な議論が必要であった(余)エンドの存在性が分かりやすい形で証明されるとともに, 多くの重要な結果が得られる。具体的には,

指標理論において重要な有限テンソル圏の圏論的類関数の空間に対してフィルトレーションを導入し, その低次項の表現論的意味付けを与えた。

有限テンソル圏の森田双対から, 元のテンソル圏の中心への誘導関手の記述を与えた。

ribbon factorizable Hopf algebra の Hochschild cohomology へのモジュラー群の射影的作用を, モジュラーテンソル圏の場合へ一般化した。

これらの結果は既に Applied Categorical Structures から出版されている (2019)。また国内外の多数の研究集会で発表済みである。

### (6) ホップ垂代数の淡中構成と関連するテンソル圏に関する結果

淡中双対によれば, ホップ代数はその余表現圏の忘却関手から復元される。忘却関手からホップ代数を構成する部分は「淡中構成」と呼ばれるが, この構成をホップモナドの理論の立場から一般化した。具体的には, 小さいモノイダル圏  $D$  から余完備性などの良い条件を満たすモノイダル圏  $V$  への強モノイダル関手で, その像が rigid であるようなものから,  $V$  上の双モナドを構成する方法を与えた。さらに, この構成方法で得られる双モナド (ここでは  $T$  と書く) は以下のような性質を持つことが分かった。

もし  $V$  が組みひも圏ならば,  $T$  は  $V$  における組みひも双代数から生じている。

もし  $D$  が組みひも圏ならば, 双モナド  $T$  の余表現圏は緩い組みひも構造を持つ。

もし  $D$  が rigid なら, 双モナド  $T$  はホップモナドになっている。

これらの結果の応用として, 非可換代数上の FRT 構成とでも呼ぶべきホップ垂代数の構成方法が得られた。以上の結果は arXiv:1912.13160 として公開されている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shimizu Kenichi	4. 巻 355
2. 論文標題 Non-degeneracy conditions for braided finite tensor categories	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 106778 ~ 106778
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2019.106778	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Shimizu Kenichi	4. 巻 28
2. 論文標題 Further Results on the Structure of (Co)Ends in Finite Tensor Categories	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applied Categorical Structures	6. 最初と最後の頁 237 ~ 286
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10485-019-09577-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kenichi Shimizu	4. 巻 1
2. 論文標題 Recent developments of the categorical Verlinde formula	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of Meeting for Study of Number Theory, Hopf Algebras and Related Topics	6. 最初と最後の頁 197-222
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shimizu Kenichi	4. 巻 1
2. 論文標題 Integrals for Finite Tensor Categories	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 1--35
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) DOI:10.1007/s10468-018-9777-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenichi Shimizu	4. 巻 2017
2. 論文標題 On Unimodular Finite Tensor Categories	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 277-322
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnv394	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenichi Shimizu	4. 巻 471
2. 論文標題 The relative modular object and Frobenius extensions of finite Hopf algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 75-112
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2016.09.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenichi Shimizu	4. 巻 221
2. 論文標題 The monoidal center and the character algebra	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 2338-2371
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2016.12.037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Action functor formalism
3. 学会等名 The Eighth China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Class functions and the action functor
3. 学会等名 International Workshop on Hopf Algebras and Tensor Categories (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Recent developments of non-semisimple modular tensor categories
3. 学会等名 Geometry, Topology and Categorification Seminar
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Categorical aspects of cointegrals on quasi-Hopf algebras
3. 学会等名 The 2nd Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Class functions of tensor categories
3. 学会等名 AMS Sectional Meeting, Special Session on Tensor Categories and Diagrammatic Methods, Vanderbilt (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Coends in finite tensor categories
3. 学会等名 RIMS Workshop Vertex Operator Algebras and Symmetries (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 A description of the relative Serre functor for comodule algebras
3. 学会等名 AMS Joint Mathematics Meetings 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Relative Serre functors in Hopf algebra theory
3. 学会等名 Hopf-Algebra Conference in Tsukuba 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Integral theory for finite tensor categories
3. 学会等名 Workshop and school on "Tensor categories and topological quantum matter" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Hochschild cohomology of finite tensor categories
3. 学会等名 Workshop Tensor categories, Hopf algebras and quantum groups (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 清水健一
2. 発表標題 非半単純なモジュラーテンソル圏に関する最近の展開
3. 学会等名 日本数学会年会(代数学分科会特別講演) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Recent results on non-simple modular tensor categories
3. 学会等名 Hopf algebras and Tensor categories (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Integrals for Hopf algebras -from a tensor-categorical viewpoint-
3. 学会等名 Hopf Algebra Conference in Tsukuba (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Integral theory in finite tensor categories
3. 学会等名 AMS Joint Mathematics Meeting (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 清水健一
2. 発表標題 圏論的フェアリンデ公式と関連する最近の話題
3. 学会等名 Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kenichi Shimizu
2. 発表標題 Recent results on non-simple modular tensor categories
3. 学会等名 Workshop VOA and related topics
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kenichi Shimizu <a href="https://sites.google.com/site/shimiken/">https://sites.google.com/site/shimiken/</a>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----