

令和元年6月18日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17570

研究課題名(和文) モジュライ空間の量子対称性

研究課題名(英文) Quantum symmetry of moduli spaces

研究代表者

柳田 伸太郎 (Yanagida, Shintaro)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：50645471

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：頂点代数とは共形場理論の代数的定式化に現れる量子的な代数構造である。その頂点代数のモジュライ理論的な定式化を用いて、よく知られているボソン・フェルミオン対応と呼ばれる頂点代数の同型の幾何学的拡張を与えた。またアーベル圏の拡大列の数え上げで定まる量子代数構造である Ringel-Hall 代数に関して、楕円 Hall 代数の一体系版や古典的 Hall 代数の導来版といった、新しいタイプの Hall 代数を研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点代数については、近年その表現論が発展している一方で、幾何学的な研究は難しく未開拓である。本研究によって、この未開拓分野にささやかではあるが新しい知見が得られた。特にボソン・フェルミオン対応の幾何学的拡張はユニークな研究成果であると思われる。

また Hall 代数についてもモジュライ理論と関連した新しい発見が得られ、今後の量子代数の理論とモジュライ理論との関わりに役立つものと期待される。特に導来 Hall 代数の構造論については、これまであまり研究が進んでいないものと思われるが、本研究の成果でその端緒が解明されたと考えられる。

研究成果の概要(英文)：The theory of vertex algebras is an algebraic formulation of the two-dimensional

conformal field theory. Using the theory of factorization spaces, which is a geometric reformulation of the theory of vertex algebras, we gave a geometric reproof of the boson-fermion correspondence.

We also studied various versions of Ringel-Hall algebras, which is defined by counting short exact sequences in a given abelian category. We realized Turaev's skein algebra by the elliptic Hall algebra over the field  $F_1$  with one element. We also studied the classical derived Hall algebra, which is the derived Hall algebra for the differential graded category of complexes of nilpotent representations of the Jordan quiver.

研究分野：代数幾何学

キーワード：モジュライ理論 Hall代数 頂点代数

## 1. 研究開始当初の背景

幾何学的表現論では多様体のホモロジー群や  $K$  群にある代数が作用している状況を扱うが、考察の対象である多様体としては、古典的には等質空間、その変種として籠の表現の空間、近年では籠多様体や層（ないし層上のある種のデータ）のモジュライ空間が現れている。これらは全て、適当な意味で安定な対象のモジュライ空間とすることができる。このように幾何学的表現論では安定性が頻りに現れるが、「なぜ安定性が表現論的に重要なのか」という疑問に対しては未だ概念的な答えは出していない。本研究の主要な動機は、この間に答を出したいというものである。

動機がいささか抽象的なものであるため、具体的な話に移ろう。現在（代数的な文脈で）安定性と呼ばれているものは数多くあるが、幾何学的表現論において重要だと思われるものは Bridgeland 安定性である。これは代数曲線上および代数曲面上の接続層に関する Mumford および Gieseker の安定性の一般化であって、三角圏の対象に対して定義される概念である。代数曲面上の接続層に関する Bridgeland 安定性ないしその空間の表現論における役割は未だ不明である。その解明が本研究の動機の一つである。

以上は安定性の視点からの説明であるが、次に表現論の立場から本研究の背景・目的を説明したい。近年、所謂 AGT 予想に関連して、インスタントンのモジュライ空間の幾何学的表現論と共形場理論との関係が盛んに研究されている。共形場理論サイドでは頂点作用素代数の表現論が近年さかんに研究されているが、AGT 予想に現れる Liouville 場の理論はまだ数学的な確立を見ていない。有理的頂点作用素代数は、その共形ブロックを考えることで 2 次元モジュラー関手を誘導するが、AGT 予想の文脈で現れる頂点代数は有理的でないので、“無限階数のベクトル束を値にもつモジュラー関手”が必要になり、従来のアプローチはそのままでは適用できない。本研究ではこの無限階数のモジュラー関手の構築をもう一つの動機とする。

AGT 予想には  $K$  理論版があって、その共形場理論サイドに現れる代数構造は量子トロイダル代数であると期待されている。この代数は楕円 Hall 代数とも呼ばれていて、有限体上の楕円曲線上の接続層のなす Abel 圏の Ringel-Hall 代数と関係する。本研究のもう一つの対象として、楕円 Hall 代数をはじめとする Hall 代数をあげる。

## 2. 研究の目的

以下の 4 つを目的とする。

- (1) 頂点代数の幾何学的構成を研究し、モジュライ理論との関係を明らかにする。
- (2) Liouville 場の理論の数学的定式化をモジュラー関手の方法で試みる。特にモジュラー関手の無限階数類似を構築する。またモジュラー関手の  $q$  差分類似の構築を試みる。
- (3) 楕円 Hall 代数のパラメータの特殊化と Turaev の skein 代数との関係を整理し、 $F_1$  上の Hall 代数による定式化を行う。
- (4) 導来 Hall 代数の構造を研究する。また導来 Hall 代数の幾何学的構成を試みる。

このうち(1)と(2)については前項目で触れたので、(3)について補足する。Ringel-Hall 代数は有限体上の有限 Abel 圏  $A$  から定まる結合代数で、構造係数を短拡大列の数え上げで定まるものである。圏  $A$  の大域次元が 1 であれば更に位相的 Hopf 代数の構造を持つ。

特に  $A$  として有限体上の楕円曲線  $C$  の接続層のなす圏を取ると、得られる Hall 代数の Drinfeld ダブル  $U$  が量子トロイダル代数と代数同型であることが知られている。この代数  $U$  は 2 つのパラメータ  $q$  と  $t$  に依存するが、それらは楕円曲線  $C$  のゼータ関数の零点とみなすことができる。また有限体の位数は  $q/t$  と一致する。

代数  $U$  は Fock 表現と呼ばれる無限次元表現を持ち、その基底として Macdonald 対称関数を取ることができる。上記のパラメータ  $q$  と  $t$  は Macdonald 対称関数の 2 つのパラメータと同一視できる。この Macdonald 基底は Fock 表現を調べる上で重要なものである。

ところで代数  $U$  でパラメータを  $t=q$  と特殊化すると Fock 表現の Macdonald 基底は Schur 対称関数とみなすことができ、一般の状況より簡明な構造を持つはずである。

$t=q$  の場合の  $U$  は 2 次元実トーラスの Turaev skein 代数と同型であることが近年の Morton と Samuelson の仕事で示されている。Riemann 面の基本群の表現に付随した Goldman Lie 代数の変形が Turaev の skein 代数であり、種数が低い場合は代数曲線の接続層に付随した Ringel-Hall 代数と代数同型であることが知られている。種数 1 の場合が Morton と Samuelson の結果である。

また(4)について、導来 Hall 代数 (derived Hall algebra) とは Toën が 2007 年に導入したもので、 $dg$  圏における Ringel-Hall 代数の類似物である。Ringel-Hall 代数が Abel 圏の短拡大列の数え上げで定義されたのに対し、導来 Hall 代数は圏のモデル構造を用いて cofibration を数え上げて構造定数が定まる。この代数は Ringel-Hall 代数に比べて巨大すぎることもあって、

従来あまり研究されて来なかったように思われる。本研究では簡単な場合から研究を始める。Jordan 叢の冪零表現の圏  $A$  に付随する Ringel-Hall 代数は古典 Hall 代数とも呼ばれ、対称関数環と同型であることが知られている。まずはこの  $A$  の対象からなる複体のなす圏に対する導来 Hall 代数の構造を研究する。また、余裕があれば Lusztig による  $1$  進層を用いた Ringel-Hall 代数の幾何学的構成の導来 Hall 代数における類似を模索する。

### 3. 研究の方法

前項の各目的(1)-(4)に沿って説明する。

- (1) 頂点代数の「座標によらない」定式化である Beilinson と Drinfeld のカイラル代数 (chiral algebra) を用いて変形理論と頂点代数の関係を調べる。特にカイラル代数の chiral Chevalley 複体を解析する。また頂点代数の幾何学的フォーミュレーションである factorization space と代数曲線に付随するモジュライ空間との関係を研究する。特にボソン・フェルミオン対応の幾何学的定式化を与える。
- (2) モジュラー関手の  $q$  差分類似の構成を目標として、モジュラーテンソル圏の  $q$  類似を導入する。これは共形ブロックの  $q$  類似たちがなす圏が満たすべき拘束条件を公理化するものである。
- (3) 楕円 Hall 代数  $U$  の  $t=q$  での特殊化と Turaev の skein 代数との同型を、楕円曲線と実トーラスのホモロジー的ミラー対称性の一合体  $F1$  類似とみなせることを定式化する。Hall 代数側では  $F1$  上の Ringel-Hall 代数の枠組みを用いる。
- (4) 古典 Hall 代数の導来版がその Heisenberg ダブルであることを示す。また導来スタック上の構成可能層の理論を整備し、一般の導来 Hall 代数の幾何学的構成を行う。

### 4. 研究成果

2016 年度 11 月末までは、主に研究目的の(1)と(2)について、頂点代数の幾何学的フォーミュレーションである chiral algebra と代数曲線の付随するモジュライ問題との関係を研究した。具体的には

1. 頂点 Poisson 代数の変形量子化
  2. 変形問題の Jacobi 複体と chiral Chevalley 複体との関係
  3. ボソン・フェルミオン対応の factorization space による理解
- の 3 項目を研究した。1 と 2 では Lie 代数の変形問題に表れる Chevalley 複体の chiral algebra における類似を operad の理論を用いて導入し、その応用を考えた。特にあるクラスの頂点 Poisson 代数の変形量子化の一意性を示した。これらはプレプリント 1 と 2 にまとめた。また 3 では chiral algebra と同値である factorization space の枠組みを用いて、古典的な頂点代数の同型であるボソン・フェルミオン対応の別証明を与えた。これについては出版論文 4 にまとめた。そして関連分野のレビュー論文を出版論文 2 として執筆した。また学会発表 1-5 で講演を行った。
- 本研究、特にボソン・フェルミオン対応に関する研究によって、ささやかではあるが頂点代数とモジュライ理論の関係が一つ明らかになった。今後は頂点超代数の場合に類似の結果を得ることが目標となる。

2016 年度後半からの 1 年間は研究目的の(3)について、Turaev の skein 代数と楕円 Hall 代数との関係を研究した。 $F1$  上の Ringel-Hall 代数の枠組みを  $F1$  上の Tate 曲線上の接続層のなす圏に適用することで、 $t=q$  の場合の楕円 Hall 代数が得られることが分かった。これをプレプリント 3 にまとめた。また学会発表 6-12 で講演した。

今回の研究で  $F1$  上の代数幾何の比較的簡単な応用としてそのような対象が扱えることが分かったので、少し進展があったといえる。また Turaev の skein 代数についても、僅かではあるが知見を深められた。skein 代数は 1980 年代後半に現れた様々な「量子化」の産物であるが、近年まであまり注目されていなかったような印象を受ける。特に表現論的な扱いや代数幾何学的な扱いについては皆無で、今回のミラー対称性の  $F1$  類似の構成は skein 代数の研究に新しい視点を与えるもののはずである。一方で、Turaev の skein 代数については未だ不明な点が多く、特に定義関係式である skein 関係式の幾何学的ないし表現論的意味を明らかにすることは重要な問題である。

また 2017 年度の後半はオペラッド上の代数に対する半無限ホモロジー代数の理論を研究し、プレプリント 4 にまとめた。半無限ホモロジー代数については申請時に予定していなかった話題だが、モジュライ空間の代数幾何学と無限次元代数に関わる問題であり、今回の研究で得られた知見、特に一般のオペラッドに対する半無限複体の構成、が幾何学的な研究に役立つことを期待している。

2018年度は主に研究目的の(4)について、以下の研究課題に取り組んだ。

1. 古典的導来 Hall 代数
2. Macdonald 函数と Abel 曲面上の Hall 代数
3. 導来 Hall 代数の幾何学的構成

最初の古典的導来 Hall 代数とは、目的(4)で述べた、導来 Hall 代数の構成を Jordan 籠の表現の複体の圏に適用したものである。これは導来 Hall 代数の中でも最も単純なものだが、今まで具体的な研究はされていなかった。下地涼介氏（名古屋大学大学院多元数理科学研究科修士課程）との共同研究で、古典的 Hall 代数と対称函数環との同一視を用いて研究し、古典的導来 Hall 代数が古典的 Hall 代数の Heisenberg ダブルであることを示した。またその応用として、Hall-Littlewood 対称函数に上手く作用する頂点作用素を古典的導来 Hall 代数内で再構成した。以上の結果はプレプリント 5 にまとめた。また学会発表 15 で講演した。

2 は白石潤一氏と野海正俊氏が 2012 年に構成した双スペクトル性を持つ Macdonald 対称函数を、楕円曲線の直積上の Hall 代数を用いて幾何学的に実現するものである。この結果は学会発表 13, 14 で講演した。

3 は 2019 年度以降も進行中の課題で、1 で触れた導来 Hall 代数を複体のモジュライ空間上の構成可能層を用いて幾何学的に実現するものである。複体のモジュライ空間は代数スタックでは実現されず、導来スタックで実現できることが知られている。導来スタック上の構成可能層の導来圏および導来函手の理論を無限圏の枠組みを用いて整備し、Lusztig による Ringel-Hall 代数の幾何学的構成の導来類似を辿るのが目標である。

本研究の結果は、導来 Hall 代数の理解の上ではまだ最初の数歩を進めたに過ぎない。幾何学的構成までできて一段落がつくものと思われる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

全て査読有り。著者名、論文標題、雑誌名、巻、発行年、ページ数の順で表記。

1. Shintarou Yanagida, “Boson-fermion correspondence from factorization spaces”, *Journal of Geometry and Physics* 124 (2018), 55-63.
2. H. Minamide, S. Yanagida, K. Yoshioka, “The wall-crossing behavior for Bridgeland's stability conditions on abelian and K3 surfaces”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 735 (2018), 1-107.
3. Shintarou Yanagida, “Factorization spaces and moduli spaces over curves”, *Josai Mathematical Monographs* vol. 10 (2017), 97-128.
4. Shintarou Yanagida, “Classical and quantum vertex algebras”, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B62* (2016), 163-200.

〔学会発表〕(計 15 件)

発表者(代表)名、発表標題、学会等名、発表年の順で表記。

1. 柳田伸太郎, “導来 Hall 代数を用いた対称函数の研究”, 表現論と特殊函数セミナー 2019 沖縄, 2019 年
2. Shintaro Yanagida, “Hall algebra of abelian surface and Macdonald bispectral problem”, *Representation theory, gauge theory, and integrable systems*, 2019 年
3. Shintaro Yanagida, “Macdonald Functions and Elliptic Hall Algebra”, *Workshop and School "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models"*, 2018 年
4. 柳田伸太郎. “Turaev の skein 代数とホモロジーミラー対称性”, 研究集会「ミラー対称性とその周辺」, 2017 年
5. 柳田伸太郎, “Elliptic Hall algebra over  $F_1$ ”, 京都表現論セミナー, 2017 年
6. 柳田伸太郎, “Torus skein algebra and mirror symmetry”, 名古屋大学代数幾何学セミナー, 2017 年
7. 柳田伸太郎, “Torus skein algebra and mirror symmetry”, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2017 年
8. Shintaro Yanagida, “Torus skein algebra and mirror symmetry”, *Workshop and School "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models"*, 2017 年
9. 柳田伸太郎, “Torus skein algebra and mirror symmetry”, *Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2017*, 2017 年

10. Shintaro Yanagida, “Turaev's skein algebra for torus and a variant of homological mirror symmetry”, 第2回国際ワークショップ「微分幾何学と可積分系」
11. Shintaro Yanagida, “Factorization space and Liouville CFT”, Representation theory and differential equations, 2016年
12. Shintaro Yanagida, “Liouville CFT and factorization space”, Conformal Field Theory, Isomonodromic tau-functions and Painleve equations, 2016年
13. 柳田伸太郎, “コホモロジー的 AGT 対応と K 群類似”, ENCOUNTER with MATHEMATICS, 2016年
14. Shintaro Yanagida, “Factorization space and deformation of Liouville CFT”, Geometric Representation Theory, 2016年
15. 柳田伸太郎, “Remarks on deformation quantization of vertex Poisson algebras”, Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2016, 2016年

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

プレプリント

1. Ryosuke Shimoji, Shintarou Yanagida, “A study of symmetric functions via derived Hall algebra”, arXiv:1812.06033.
2. Shintarou Yanagida, “Operadic semi-infinite homology”, arXiv:1803.11144.
3. Shintarou Yanagida, “Elliptic Hall algebra on  $F_1$ ”, arXiv:1708.08881.
4. Shintarou Yanagida, “Jacobi complexes on the Ran space”, arXiv:1608.07472.
5. Shintarou Yanagida, “Deformation quantization of vertex Poisson algebras”, arXiv:1607.02068.

ホームページ

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/index-j.html>

## 6. 研究組織

(1)研究分担者

特になし

(2)研究協力者

研究協力者氏名： 下地涼介

ローマ字氏名： Shimoji Ryosuke

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。