

令和 2 年 6 月 8 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17572

研究課題名（和文）極小複体による幾何的対象の解釈と数論的応用

研究課題名（英文）Interpretation of geometric objects by minimal complexes and arithmetic applications

研究代表者

石塚 裕大 (Ishitsuka, Yasuhiro)

京都大学・理学研究科・特定助教

研究者番号：50761136

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：数論的対象と線形表現の軌道について、平面三次曲線の回転対称な線形行列式表示についての数論幾何的解釈を行い、平均的な振る舞いを導出した。また平面曲線や空間の古典的な代数幾何に現れる対象について、数論的な観点から研究を行い、多くの結果を得た。フェルマー四次曲線の四等分点へのガロア作用、双接線などの存在に関する局所大域性が成り立たない平面四次曲線の構成および平面三次曲線の変曲点についての強い局所大域性などである。関連する研究として、余正則空間の軌道指数和の決定を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

新規に構成した対応と以前の類似の対応を比較すると、数論的不変式論の手法では、Jacobi多様体の有理点とPicard群の差異のような、微妙かつ重要な差を表すことができることを示唆している。また周辺の問題を研究することで、古典的な代数幾何に現れる対象のもつ数論的な側面が明らかになったほか、それらの研究での数式処理システムの重要性を再確認できる結果になった。軌道指数和についても、BhargavaとHoの種数1の曲線と軌道との対応を利用することが必要になったほか、古典的に見いだされていた不変式の解釈も予期せず用いる形になり、数論的不変式論において古典論の重要性を再確認できるものとなった。

研究成果の概要（英文）：With respect to correspondence between arithmetic objects and orbits of linear representations, we interpreted rotationally symmetric determinantal representations of smooth plane cubics, and deduced the average behavior. We obtained results related to geometric objects in plane or space curves from arithmetic viewpoint. For example, we determined the Galois action on 4-torsion points of Jacobian varieties of Fermat quartic curves; we constructed a plane quartic failing the local-global property for the existence of bitangents; we proved the local-global property for the existence of flexes in smooth plane cubics in a strong sense. We also determined the orbital exponential sum of the space of binary quartic forms.

研究分野：数論幾何学

キーワード：数論的不変式論 行列式表示 平面曲線 局所大域性 軌道指数和 ヤコビ多様体 フェルマー曲線

## 1. 研究開始当初の背景

数論的不変式論は、Bhargava らのグループにより推し進められている数論の一分野である。研究対象は数論的对象の統計的・平均的な振る舞いで、たとえば「与えられた上界以下の不変量を持つ有理数体の四次拡大がどれくらいあるか?」「有理数体上の楕円曲線の平均階数は?」といった疑問に答えることが目的となる。特色として、数論的对象を代数群の線形表現の軌道として捉え直すことで、数の幾何などの解析数論的な手法を適用できるようにすることが挙げられる。

代表的な結果である Bhargava と Shankar による「有理数体上の楕円曲線の階数について、高さに関する平均は 1.5 以下」を見てみる。これは一般化 Riemann 予想や BSD 予想を仮定する類似の結果を劇的に改善するものであり、2014 年の Bhargava のフィールズ賞受賞の主要業績の一つにも数えられている。証明を概観する。まず平均階数の問題を 2-Selmer 群の平均位数という問題に置き換える。そして楕円曲線の 2-Selmer 群という数論的な対象を、2 元 4 次形式の空間の軌道で解釈し直す。この線形表現の空間において、数の幾何の技法を用いることで証明が為されている。その後、3 元 3 次形式や 2 次形式のペアの空間、9 次元空間の 3 回外積の空間など、様々な線形表現の軌道について数論的な解釈と解析的手法の適用がなされ、数論的对象の平均的な振る舞いについての結果が得られている。

一連の結果を拡張することを考える。Bhargava—Shankar については、解析的手法の適用については、表現が余正則空間と呼ばれる特殊な表現であることが用いられていた。しかし数論的对象と線形表現の軌道の対応については、余正則空間でなくとも期待できる。

実際に研究代表者は線形行列式表示という古典的な問題に数論的な問題意識を導入し、いくつかの結果を証明した。線形行列式表示は平面曲線の定義方程式を行列式で書き下すという問題で、複素数体では十九世紀に考察されていた対象であり、平面曲線の次数が四次以上であるときは余正則空間の枠組みから外れている。数論的对象よりは軌道側に問題意識があるという点で上記の結果群とは異なるが、平面三次曲線が線形行列式表示を持つかどうかという問題に解析数論的手法を適用するなど、先行するいくつかの結果とほぼ並行する結果を線形行列式表示についても得ることができた。

こうした先行研究を踏まえ、さらに別の空間にも対応を構成し、応用を見つけたいというのが本研究の動機である。

## 2. 研究の目的

背景で述べたとおり、数論的对象と線形表現の軌道の対応を系統的に拡張する、それを応用に結び付けることが大きな目的である。この対応の構成には、2-Selmer 群の場合のように「数論的对象を線形表現の軌道で解釈する」という意味のほか、線形行列式表示のように「線形表現の軌道を数論的对象として考察する」という意味もある。さらにこうして出てきた数論的对象としての線形表現の軌道において、各種の不変量がどういった意味を持つのかについても考察することで、古典的な不変式論・古典的な代数幾何の結果とのつながりを見つけることも目標としていた。

応用については、これまでの手法を適用、あるいは拡張して数論的对象の統計的な振る舞いを調べることが一番の目的である。また「線形表現の軌道を数論的对象として解釈する」という観点からは、線形行列式表示などの軌道に、局所大域性などの数論的な観点からの問題意識を持ち込んで調べることの一つの応用として当初より考察していた。そして線形行列式表示は非可換代数幾何学とのつながりが指摘されていたことから、他分野とのつながりも見出すことで、数論的对象・軌道の両方に新しい観点を導入することも目指して研究を実施した。

## 3. 研究の方法

線形行列式表示、および 3-Selmer 群などに共通して現れていたのが、極小自由分解である。線形行列式表示は長さ 1 の極小複体で平面三次曲線の直線束を記述することに対応する。また 3,4,5-Selmer 群に関する結果では、楕円曲線のツイストと呼ばれる曲線について、その定義イデアルの極小自由分解が代数群の線形表現の軌道に対応している。

これを踏まえ、極小自由分解をテーマとする可換代数の研究集会への出席や、非可換代数幾何学の研究者との打ち合わせを行った。また線形行列式表示の問題について研究・共同研究を続行し、得られた結果について発表した。この際に必要な書籍・電子機器の購入、クラウドサービスの導入などを行っている。さらに応用面で用いられる解析数論の研究者とも議論を行い、研究集会を開催している。

## 4. 研究成果

研究を進めるうち、基本的な問題だが具体例が構成されていないケースが多く見付き、その研究に勤しむこととなった。このため、得られた結果は当初の目的とは趣が異なり、「応用」寄

りとなっている。大まかに述べると、線形行列式表示とその計算、数論的な性質を持つ平面曲線の構成、種数の高い曲線の Jacobi 多様体についての有理点の決定、および意図していなかった指数和の計算である。

(1) 線形行列式表示とその計算：線形行列式表示は直線束の大域切断から容易に計算されるが、大域体上だと直線束のデータが Jacobi 多様体の有理点としてデータが与えられることがある。こうしたズレを押さえた形でアルゴリズムとしてまとめ、計算方法と周辺の結果を出版した（伊藤哲史氏、大下達也氏との共同研究）。

こうした基本的な部分を押さえた結果として、Bhargava-Ho で扱われていなかった「平面三次曲線の回転対称な行列式表示」について研究し、それを補足する形で対応する数論的な対象とその平均的な振る舞いを決定することに成功した。報告集に出版しているが、類似の問題についても研究を続行中である。

(2) 数論的な性質を持つ平面曲線の構成：すでに先行研究として、伊藤哲史氏との共同研究で対称な線形行列式表示が局所大域性を満たさない例を構成していたが、これは有理数体の 1008 次拡大体上での話であった。これについて有理数体上でも例を構成することができた。また、対称行列式表示に類似する双接線や Steiner の六つ組についても、局所大域性の反例を構成している（伊藤哲史氏、大下達也氏、谷口隆氏、内田幸寛氏との共同研究）。さらに同様の問題を種数 4 の曲線に延長して、具体例の一つ構成することに成功している。

また予期せぬ派生として、平面三次曲線の変曲点は局所大域性を強い形で満たすことを示した。強い形というのは、「Dirichlet 密度が  $8/9$  より大きい素点の集合で有理点である変曲点を持つば、大域的にも有理的な変曲点がある」という主張である（伊藤哲史氏との共同研究）。

(3) 種数の高い曲線の Jacobi 多様体についての有理点の決定：伊藤哲史氏、大下達也氏との共同研究である。Fermat の四次曲線と呼ばれる  $X^4 + Y^4 = Z^4$  で定義される平面曲線について、その Jacobi 多様体の有理点を決定した。より詳細には、Jacobi 多様体の 4 を法とした Galois 表現をきわめて具体的に書き下し、その固定点として有理点を決定している。現在もこれをひねった曲線について研究を続行している。

(4) 余正則空間の指数和：谷口隆氏、伊藤哲史氏、Frank Thorne 氏、Stanley Yao Xiao 氏との共同研究である。谷口隆氏と Frank Thorne 氏は、いくつかの概均質ベクトル空間について、有限体上の軌道指数和と呼ばれる量を計算していた。さらにここから解析的手法により、判別式が少ない個数の素数の積であるような三次体・四次体の評価が得られている。

研究代表者はこれに協力する形で研究に参加し、いくつかの概均質ベクトル空間について軌道指数和を決定した。さらに余正則空間である二元四次形式の空間の軌道指数和を決定した。この結果は解析数論的手法について検討中である。またより複雑な、三元三次形式の空間についても一定以上の進展があり、研究を続行中である。

また、数論の対象と線形表現の軌道の対応の拡張については、今のところ満足できる形で主張をまとめられていないものがある。線形行列式表示の場合のような「定義方程式を行列式で表す」のような明快な解釈が見つからないためである。可積分系などの視点も取り入れながら、現在も研究を続けている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Ishitsuka Yasuhiro, Ito Tetsushi, Ohshita Tatsuya	4. 巻 11
2. 論文標題 On algorithms to obtain linear determinantal representations of smooth plane curves of higher degree	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 9~12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.14495/jsiaml.11.9">https://doi.org/10.14495/jsiaml.11.9</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Yasuhiro Ishitsuka	4. 巻 8
2. 論文標題 An algorithm to obtain linear determinantal representations of smooth plane cubics over finite fields	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 69--72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://doi.org/10.14495/jsiaml.8.69">http://doi.org/10.14495/jsiaml.8.69</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Yasuhiro Ishitsuka and Tetsushi Ito	4. 巻 221
2. 論文標題 The local-global principle for symmetric determinantal representations of smooth plane curves in characteristic two	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 1316--1321
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.09.013">https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.09.013</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasuhiro Ishitsuka and Tetsushi Ito	4. 巻 12
2. 論文標題 On the symmetric determinantal representations of the Fermat curves of prime degree	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory (IJNT)	6. 最初と最後の頁 955--967
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.1142/S1793042116500597">http://dx.doi.org/10.1142/S1793042116500597</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 石塚裕大	4. 巻 1
2. 論文標題 Abel多様体の基礎	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 2015 年度整数論サマースクール「志村多様体とその応用」報告集	6. 最初と最後の頁 21--49
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ishitsuka Yasuhiro, Ito Tetsushi, Ohshita Tatsuya	4. 巻 16
2. 論文標題 Explicit calculation of the mod 4 Galois representation associated with the Fermat quartic	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 881 ~ 905
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1142/S1793042120500451">https://doi.org/10.1142/S1793042120500451</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件(うち招待講演 4件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 石塚裕大
2. 発表標題 平面三次曲線の変曲点の局所大域性について
3. 学会等名 慶應代数セミナー(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石塚裕大
2. 発表標題 平面三次曲線の変曲点の局所大域性について
3. 学会等名 第228回 北陸数論セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石塚裕大
2. 発表標題 平面4次曲線の双接線に関する局所大域性
3. 学会等名 日本応用数理学会2019年研究部会連合発表会 「数論アルゴリズムとその応用」(JANT)セッション
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石塚裕大
2. 発表標題 Computation on linear determinantal representations
3. 学会等名 神戸整数論集会2017(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yasuhiro Ishitsuka
2. 発表標題 Arithmetic of rotationally symmetric determinantal representations
3. 学会等名 Arithmetic Geometry and Related Topics(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石塚裕大
2. 発表標題 三次曲線の回転対称な行列式表示について
3. 学会等名 第16回北陸数論研究集会(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大下達也
2. 発表標題 平面4次曲線の線形行列式表示を計算するアルゴリズムについて
3. 学会等名 日本応用数学会2018年研究部会連合発表会 「数論アルゴリズムとその応用」(JANT)セッション
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石塚裕大
2. 発表標題 Arithmetic of linear determinantal representations; I, II
3. 学会等名 第18回静岡代数学セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 石塚裕大
2. 発表標題 平面曲線の行列式表示の数論的側面
3. 学会等名 第10回福岡数論研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 石塚裕大
2. 発表標題 大域体での線形行列式表示
3. 学会等名 九州代数セミナー
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----