

令和 2 年 6 月 3 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17573

研究課題名（和文）Fano多様体とCalabi-Yau多様体の変形と分類

研究課題名（英文）Deformation and classification of Fano varieties and Calabi-Yau varieties

研究代表者

佐野 太郎 (Sano, Taro)

神戸大学・理学研究科・助教

研究者番号：10773195

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：Fano多様体およびCalabi-Yau多様体と呼ばれる代数多様体は、分類理論において核となる。その分類に関わる様々な問題を研究した。Pizzato氏、Tasin氏との共同研究ではFanoまたはCalabi-Yau重み付き完全交差上で効果的非消滅予想を解決した。Coughlan氏との共同研究でK3曲面およびAbel多様体上のaffine coneの変形がほとんど潤滑化を持たないことを示した。大川氏との共同研究で曲線のモジュライスタックが非自明な非可換変形をほとんどの場合持たないことを示した。橋本氏との共同研究でケーラーでないCalabi-Yau多様体で第2ベッチ数が任意に大きい例を構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体の分類理論は代数幾何学における中心的な話題であり、その核となるFano多様体、Calabi-Yau多様体の分類を進めるのは意義がある。また、最近Fano多様体に関連する研究の進展は目覚ましく、注目度は高い。Calabi-Yau多様体に関連する研究はFano多様体に比べると小康状態であるが、次に目覚ましい進展が訪れる可能性があり、アイデアを積み重ねる価値がある分野と思う。

研究成果の概要（英文）：I studied several problems on Fano varieties and Calabi-Yau varieties which form building blocks in the classification theory. With Pizzato and Tasin, we solved the effective non-vanishing conjecture on weighted complete intersections. With Coughlan, we showed that many affine cones over K3 surfaces or Abelian varieties do not admit smoothings. With Okawa, we showed the non-commutative rigidity of the moduli stack of stable pointed curves except for finitely many cases. With Hashimoto, we constructed examples of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds with arbitrarily large 2nd Betti numbers.

研究分野：代数幾何学

キーワード：Fano多様体 Calabi-Yau多様体 変形理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数多様体の分類において Fano 多様体、Calabi-Yau(CY)多様体は核となる対象である。実際、分類における強力な道具として極小モデルプログラムがあり、それが完成した暁には代数多様体は、一般型、Calabi-Yau、Fano の三つのクラスを fibration を通して組み合わせたものとして記述できることになる。また、Fano 多様体に関する近年の進展は目覚ましく、Donaldson らによる Kahler-Einstein 計量の存在と安定性との同値性の確立から、Fano 多様体のコンパクトモジュライ空間の構成に著しい発展があった。Calabi-Yau 多様体の研究は数理物理との関連で Mirror 対称性と呼ばれる現象に関わる研究が多くなされてきた。最近、Gross-Siebert による tropical 多様体を使った Calabi-Yau 多様体の変形理論が注目を集めていた。

Fano 多様体の変形に関わる問題を申請者は扱っていた。Warwick 大学での博士課程においては \mathbb{Q} -Fano 3-fold の \mathbb{Q} -潤滑化問題という 3 次元 Fano 多様体の分類における重要問題に取り組み、ほとんどの場合に問題を解決した。しかし、種数の上限の決定など分類に直結する問題が未完のままであった。卒業後、ドイツのマックスプランク研究所において Tasin 氏と Fano および CY 重み付き完全交差の研究を始め、Coughlan 氏と CY 多様体上の affine cone の変形についての研究を始めた。また、大川氏との安定曲線のモジュライ空間の非可換変形の研究を始めたのもこの頃である。申請時にはこれらの研究には完成には一定の距離があった。また、新たな展開として toric 多様体の変形や Calabi-Yau 多様体の対数変形についても構想を練っていた。

2. 研究の目的

研究の目的は、Fano 多様体および Calabi-Yau 多様体の分類を進展させることである。目標としては、分類理論における大問題の一つである効果的非消滅予想、およびその特別な場合である Fano 多様体の一般象の存在、を目標にした。また、Calabi-Yau 多様体に関しては、その位相型が有限かどうか、という大問題が残されており、広く未解決であるので、これを遠い目標とした。Fano 多様体の分類は 3 次元の滑らかな場合には 80 年代に完成を見たが、4 次元以上や 3 次元末端特異点を持つ場合には未完成であり、これを完成に近づけることも目的である。

3. 研究の方法

方法としては、効果的非消滅予想については、重み付き完全交差上では regular pair と呼ばれる組合せ論的対象の性質を研究することで予想を導出する。

Affine cone の変形の研究では \mathbb{C}^* -作用付きの変形関手を考え、 T^* 空間の固有分解のモジュライ論的解釈を用いる。

Calabi-Yau 多様体の有限性については、退化族が与えられた時に極小モデル理論を使って族の性質を調べる方法をとる。また、有界性と関連して、できるだけ多くの例を作るため(無限個という可能性も視野に入れて)具体例の構成を行う。具体的な方法としては、川又-並河の正規交差多様体の対数変形の定理を使えるような、有理連結多様体のペアを構成する。

Fano 多様体の分類については toric 多様体の変形を考えて多くの例を更生することを試みる。

4. 研究成果

まず、Pizzato 氏、Tasin 氏との共同研究で Fano および Calabi-Yau 重み付き完全交差(WCI)多様体上で効果的非消滅予想を解決した。また、滑らかな Fano WCI 上では滑らかな基本的因子が取れることもわかった。一般型超曲面の場合にも予想を解決した。また、副産物として quasi-smooth な WCI の組み合わせ的な特徴づけも行った。証明でキーとなったのは、次数と重みの候補となる整数の組を regular pair という算術的な概念を導入して絞り込んだことであった。これにより、問題が Frobenius 数の評価とも結びついた。

Coughlan 氏との共同研究では、Calabi-Yau 多様体上の affine cone という特異点の変形を研究した。特に、 $K3$ 曲面上の affine cone では次数が高い一般の $K3$ 曲面上の cone は cone としての変形しか持たないことが示せた。これにより潤滑化できないことが従う。 $K3$ 曲面上の projective cone が潤滑化を持つこととその曲面が Fano 3-fold の一般象として実現されることは同値であるが、affine cone の潤滑化可能性と同値ではないか、と予想した。また、Abel 多様体上の affine cone は常に cone としての変形しか持たないことを示し、潤滑化不可能であることを示した。

大川氏との共同研究では、点付き安定曲線のモジュライスタック $\overline{M}_{g,n}$ が非可換変形を有限個の (g,n) を除き持たない、ということをおある HKR 同型の成立を仮定して証明した。この HKR 同型とは、第 2 Hochschild コホモロジーを多様体上の接続層のコホモロジーの直和として記述するもので、これは多様体がスキームの時には分かっているものの、スタックの場合には未解決である。モジュライスタックがスキームになる時には証明ができるので、特に $g=0$ の時には非可換変形がないことが示せた。これは(Smirnov 氏と)Manin 氏の問に対する否定的な回答を与えた。

橋本氏との共同研究において、ケーラーでない Calabi-Yau 3-fold で第 2 ベッチ数が任意に大

きい例を構成した。構成法としては、川又-並河による対数変形理論を使い、具体的に正規交差多様体を有理多様体 2 つを $K3$ 曲面に沿って貼り合わせて構成した。ここでポイントになったのは、はり合わせる時に $K3$ 曲面の自己同型が無限群であることを使って正規交差多様体が無限通り現れるようにしたことである。結果として現れる多様体がケーラーでないことの証明では、正規交差多様体が射影的でないばかりでなく、有効線束で各既約成分上により線束を導くものがないことを具体的計算から示すことがキーになった。副産物として、 $K3$ 曲面の自己同型の「族」で全空間に伸びないものを flop を使って記述した。

Q-Fano 3-fold の研究も少し進展した。まず、弱 Q-Fano 3-fold の変形に障害がないことを証明した。また、弱 Q-Fano 3-fold が Q-分解的な指数 1 被覆を持つ時には、Q-潤滑化を多くの場合に持つことを示した。また、特異点の評価式を証明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 sano Taro	4. 巻 29
2. 論文標題 Deformations of weak Q-Fano 3-folds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 23pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X18500490	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Stephen Coughlan, Taro Sano	4. 巻 Vol 2
2. 論文標題 Smoothing cones over K3 surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 EPIGA	6. 最初と最後の頁 10pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Pizzato Marco, Sano Taro, Tasin Luca	4. 巻 11
2. 論文標題 Effective nonvanishing for Fano weighted complete intersections	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 2369 ~ 2395
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/ant.2017.11.2369	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Taro Sano	4. 巻 volume 95, Issue 1
2. 論文標題 Deforming elephants of Q-Fano 3-folds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 pp. 23-51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/jlms.12000	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件（うち招待講演 18件 / うち国際学会 11件）

1. 発表者名 佐野 太郎
2. 発表標題 Log deformations of VNC Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Taro Sano
2. 発表標題 Log deformations of VNC Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 Positivity in algebraic geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐野 太郎
2. 発表標題 On deformations of log Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 談話会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐野 太郎
2. 発表標題 On log deformations of Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 ホッジ理論と代数幾何学（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐野 太郎
2. 発表標題 対数的Calabi-Yau多様体の変形について
3. 学会等名 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐野 太郎
2. 発表標題 Effective non-vanishing for weighted complete intersections
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺 2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐野 太郎
2. 発表標題 Construction of Calabi-Yau manifolds by log deformation theory
3. 学会等名 神戸大学代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐野 太郎
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds by smoothing normal crossing varieties
3. 学会等名 Birational geometry and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Taro Sano
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds by log deformations
3. 学会等名 Algebraic Geometry seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Taro Sano
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds by smoothing normal crossing varieties
3. 学会等名 Geometry & Mathematical Physics seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐野 太郎
2. 発表標題 Construction of non-Kähler Calabi-Yau 3-folds by smoothing normal crossing varieties
3. 学会等名 京都大学代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Taro Sano
2. 発表標題 Effective non-vanishing for weighted complete intersections
3. 学会等名 the 4-th Seoul Seminar on Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Taro Sano
2. 発表標題 Effective non-vanishing for weighted complete intersections
3. 学会等名 Higher dimensional algebraic geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Deformations of Calabi-Yau/Fano varieties
3. 学会等名 Current Topics in Algebraic and Symplectic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Deformations of cones over K3 surfaces
3. 学会等名 THE 15TH AFFINE ALGEBRAIC GEOMETRY MEETING (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Log deformations of VNC Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 The 2nd Higher dimensional algebraic geometry Echigo Yuzawa symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Log deformations of VNC Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 the 4th workshop on Algebraic Geometry -Ube- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Log deformations of Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 代数セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Deformations of cones over K3 surfaces
3. 学会等名 TSUDA COLLEGE AND OIST JOINT WORKSHOP ON CALABI-YAU VARIETIES: ARITHMETIC, GEOMETRY AND PHYSICS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 佐野太郎
2. 発表標題 Deformations of cones over K3 surfaces
3. 学会等名 代数幾何学セミナー
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Homepage of Taro Sano
<https://sites.google.com/site/tarosano222/>
Homepage of Taro SANO
<https://sites.google.com/site/tarosano222/home>
Homepage of Taro Sano
<https://sites.google.com/site/tarosano222/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----