様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　６月１０日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2019
課題番号：１６K１７５７５

研究課題名（和文）非可換ガロワ拡大に対する数論的予想の精密化の研究

研究課題名（英文）Studies on refining arithmetic conjectures for non-abelian extensions

研究代表者
野村　次郎（Nomura, Jiro）

東京理科大学・理学部第二部数学科・助教

研究者番号：１０７７２１２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：虚２次体の(アーベル拡大とは限らない)不分岐拡大に付随するStickelberger 元のintegralityについての結果を得た。より正確には、群環上のある行列が存在し、Stickeberger元がその行列の被役ノルムに一致することを証明した。その系として、虚２次体の不分岐拡大のイデアル類群がStickelberger元の作用にによって消えることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
虚２次体に関する結果には不分岐拡大という仮定がついているが、この過程を外してしますと、結果が自明に成立してしまうため、結果的には虚２次体についての非可換Brumer-Stark予想を完全に解決しているということになる。非可換Brumer-Stark予想についての結果の多くは、数論的な強い仮定を必要とする場合が多いため、そのような仮定なしに成立するという点で重要な結果といえる。

研究成果の概要（英文）：I obtained a result on the integrality of Stickelberger elements attached to (not necessarily abelian)unramified extensions of imaginary quadratic fields.More precisely, I proved that a Stickelberger element coincides with a reduced norm of a matrix over a group ring.As a corollary, I proved that ideal class groups attached to unramified extensions of imaginary quadratic extensions are annihilated by Stickelberger elements.

研究分野：整数論

キーワード：イデアル類群　L関数　非可換拡大

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

代数体のイデアル類群のガロワ加群の構造の研究は整数論に於ける重要なテーマである．特に，代数体の有限次アーベル拡大(ガロワ群が可換群になる場合) に対しては，Brumer-Stark 予想 (ArmandBrumer, Harold Stark, John Tate らによって 80 年代初頭までに定式化) と呼ばれる重要な予想がある．この予想は，L 関数の特殊値を用いて作られる Stickebelger 元がその作用によってイデアル類群を消すことを予想したものである．ごく最近になるまで非可換拡大に対して同様の予想は定式化されていなかったが，2011 年には Andreas Nickel と David Burns によって独立に Brumer-Stark 予想の非可換拡大への一般化である「非可換 Brumer-Stark 予想」が定式化された．私はこれまで，この予想を中心に研究をすすめ，幾つかの肯定的な結果を得てきた。アーベル拡大に対しては Brumer-Stark 予想の精密化の研究が進められている。例えば，Cornelius Greither，栗原将人，三浦崇らによって，イデアル類群の Fitting イデアルという対象を用いた精密化の研究が進められている．より正確には、イデア類群の Fitting イデアルを Stickleberger 元を用いて完全に記述するという研究がなされている．Fitting イデアルは加群の「有限表示」というものに対して定義されるもので，Fitting イデアルは加群を消す元全体にふくまれるという性質がある．しかしながら、この包含関係は一般には等号とはならないので，Fitting イデアル を完全に記述するという研究は Brumer-Stark 予想の主張を大きく超えるものである．さて，非可換拡大でこのような研究がなされなかった最も大きな要因は，Fitting イデアル の非可換版が存在しなかったことにある．そのために，アーベル拡大と類似の研究をすること自体が不可能な状態にあった．ところが 2010 年に，Andreas Nickel によって非可換拡大に対して Fitting イデアル を一般化した非可換 Fitting invariant が定義され，アーベル拡大と同様の問題を非可換拡大に対して考察できるようになった.私はこの非可換 Fitting invariant を用いて,非可換 Brumer-Stark 予想の精密化ができるのではないかと考えた。

２．研究の目的

本研究の目的は，非可換 Brumer-Stark 予想より精密にイデアル類群のガロワ作用を記述する理論を構築することである。基本的な道具は、非可換 Fitting inavariant であるが、可換環論における Fitting イデアルよりもその性質が明らかになっていないという問題がある。その中で最も重要な問題が、非可換 Fitting invariant は「有限表示」のとりかたによってしまうということである。しかしながら、様々な有限表示に対する非可換 Fitting invariant のなかで、最大のものが存在していることまでは分かっている。このような中で以下のことを研究の目的とする。

(1) 最大非可換 Fitting invariant の計算方法の解明
与えられた有限表示からどのようにして最大非可換 Fitting invariant を計算すれば良いのかを明らかにする.または，どのよにして最大非可換 Fitting invariant を与える有限表示を構成するかを明らかにする.

(2) イデアル類群の非可換 Fitting invariant を Stickelberger 元を用いて完全に記述する
代数体のガロワ拡大に対して，その部分拡大に付随する Stickelberger 元すべてを用いてイデアルを構成し，それがイデアル類群の最大非可換 Fitting invariant と一致することを証明する.

３．研究の方法

最大非可換 Fitting invariant の計算が困難である理由の一つは，この対象が行列の被約ノルムという複雑な写像を用いて定義されている点にある． そこで， 被約ノルムを取る前の行列そのものを考え， その行列で生成されるイデアルの被約ノルムが最大非可換 Fitting invariant を与えるかどうかを考察する．精密化の研究においても，Stickelberger 元そのものを考えるのではなく，その被約ノルムが Stickelberger 元に成るような行列を考え，その行列を対象に研究を進める.より具体的には、以下のような方法を用いいる.

pを素数，Gを有限群，Mを有限表示$Z_p[G]^a \to Z_p[G]^b \twoheadrightarrow M$ を持つZp[G] 加群とする．また，任意の自然数n に対して行列環Mn(Qp[G])上の被約ノルムをNrdと書くことにする(Nrd:Mn(Qp[G])→Z(Qp[G]))．Gがアーベル群の場合は被約ノルムは行列式にほかならないことを注意しておく．f をa×b行列と見た時のb ×b 小行列全体をSと書くことにすると，f に対する非可換Fitting inbariant Fitt(f) は

Fitt(f):= [?Nrr(H) | HはSの元?

で定義される．Gがアーベル群の時にはFitting イデアルと一致するものである．そもそも Fitting イデアルが有限表示の取り方によらずに決まる理由は，行列式が「余因子展開」

と「多重線形性」という性質を持っている点にある．一方，一般の被約ノルムにはこのような素行の良い性質が存在していない．したがって，この２つの性質を利用することを回避することが必要となるが「双線形性」についての問題を回避するために私は

$$F^{mat}(M) := _{M_n(\mathbb{Z}_p[G])}\{ H \mid H \text{ は}S\text{の元} \}$$

を考察することを考えている．この$F^{mat}(M)$ を用いることで

$$\mathrm{Fitt}^{max}(M) = \{ \mathrm{Nrd}(J) \mid J \text{ は } F^{mat}(M)\text{の元} \}$$

となることを期待している．ここで$\mathrm{Fitt}^{max}(M)$ はM の最大非可換Fitting invariant である．実際現在までに

- f が正方行列である場合，
- b を「十分大きく」とった場合

には，期待している等号が成立していることを確認している．本研究では上記の条件なしに等号を証明することを目標とする．

４．研究成果

虚２次体の(アーベル拡大とは限らない)不分岐拡大に付随する Stickelberger 元の integrality についての一般的な結果を得ることができた．より具体的に述べるためにいくつか記号を準備する。

　pを素数、kを虚２次体，K/kを有限次不分岐拡大、Gをそのガロワ群とする。Tをある条件をみたすkの有限素点の集合、$Cl(K)^T_p$をTに付随するKの ray class group のpシーロ部分群、$\theta_{K/k,T}$をTで修正された Stickelberger 元とする時、

(1) Z_p[G]のある行列Hが存在して、$\theta_{K/k,T} = \mathrm{Nrd}(H)$が成立する。ここで、$\mathrm{Nrd}: \mathbb{Q}_p[G] \to Z(\mathbb{Q}_p[G])$は被役ノルムである($Z(\mathbb{Q}_p[G])$は$\mathbb{Q}_p[G]$の中心)．

(2) $\theta_{K/k,T} \cdot Cl(K)^T_p = 0$.

(3) pが拡大次数を割らない時、$\theta_{K/k,T}$ は$\mathrm{Fitt}^{max}(Cl(K)^T_p)$にふくまれる．ここで、$\mathrm{Fitt}^{max}$は最大非可換 Fitting inavariant である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Jiro Nomura	４．巻 2018
２．論文標題 Integrality of Stickelberger elements attached to unramified extensions of imaginary quadratic fields	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of Number Theory	６．最初と最後の頁 332-343
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2017.11.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考