

令和 2 年 6 月 3 日現在

機関番号：32634

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17576

研究課題名（和文）旗領域の研究とホッジ理論への応用

研究課題名（英文）Study on flag domains and its application to Hodge theory

研究代表者

巴山 竜来（Hayama, Tatsuki）

専修大学・経営学部・准教授

研究者番号：60755891

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：半単純複素リー群が推移的に作用する複素旗多様体に対し、その実形である実リー群は有限個の開軌道を持つことが知られている。これを旗領域と呼ぶ。本研究では、旗領域の性質について研究を進めた。主要な成果は旗領域の擬凹性について解明できたことである。また擬凹旗領域のサイクル連結性に関して、特別な場合についてその性質を解明することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究成果によりAlan Huckleberry氏が過去の論文で立てた予想が肯定的に解決され、旗領域に関する理解が進んだ。またその成果は国際研究雑誌に掲載され、様々な研究機関で講演を行った。

研究成果の概要（英文）：An open real group orbit in a complex flag manifold is called a flag domain.

In this research project, we studied geometric properties of flag domains. One of the main result is about pseudoconcavity of flag domains. We proved that a flag domain is either pseudoconvex or pseudoconcave, which is positive confirmation of Huckleberry's conjecture. The paper on this result has been published in *Mathematische Annalen* as a co-authored paper with Huckleberry and Latif. Moreover, we studied cycle-connectivity of pseudoconcave flag domains. We determined which pseudoconcave flag domain is one-connected in some particular cases.

研究分野：複素幾何学

キーワード：旗領域 対称空間 リー理論

## 1. 研究開始当初の背景

旗領域はエルミート対称領域や周期領域を一般化した複素多様体である。とくにホッジ理論においては、周期領域はホッジ構造の変形や退化、保型コホモロジーを考える上で重要な研究対象である。旗領域は Wolf や Huckleberry らによって古くから研究されてきたが、旗領域研究のホッジ理論への応用が Griffiths らによって行われており、本研究はその流れを汲んでいる。旗領域については擬凸である場合はすでによく知られているが、そうでない場合は未解決問題も多い。本研究は擬凸ではない旗領域について研究を進め、それをホッジ理論に応用することを目指し研究を開始した。

## 2. 研究の目的

本研究は次の3つのテーマに関する問題を取り扱うことを当初の目的としていた。

### (1) 旗領域の擬凹性に関する問題

旗領域については、「擬凸ではない旗領域は擬凹である」ことが Huckleberry によって予想されている。このことはいくつかの例では確かめられていたが、一般にそれが正しいことは確かめられていなかった。この予想を解決する。

擬凹性はその強さを計測するための次数を定義することができる。この次数の評価手法を与える。

上の予想における擬凹性は、Andreotti の定義による(弱い)擬凹性である。Andreotti-Grauert の定義による(強い)擬凹性はイグゾースションの存在も求められるが、後者の擬凹性からは次数評価からコホモロジーの有限性定理を導くことができる。旗領域に対して、後者の意味での擬凹性を考える。

### (2) 旗領域のサイクル連結性に関する問題

擬凸ではない旗領域はサイクル連結と呼ばれる性質を持つことが知られている。ここでサイクル連結性とは、任意の2点が特殊な有限サイクル鎖によって繋がっていることを保証するものである。特別な旗領域については、1つのサイクルのみからなる鎖で繋がることが分かっている。そのような旗領域は1連結と呼ばれている。1連結旗領域がどのようなクラスの旗領域であるかを明らかにする。

サイクル連結性の鎖の有限性について、そのサイクルの個数の下限は知られていない。下限が小さいほど強い連結性を持つ(1連結性は最も強い連結性である)。この下限の評価手法を与える。

サイクル連結性と擬凹性は関連していると期待されている。(1) で求めた評価と(2) で求めた評価から、サイクル連結性と擬凹性の関係を明らかにする。

### (3) 旗領域の境界成分とホッジ構造の退化に関する問題

退化したホッジ構造のタイプが旗領域の境界成分と関係していることが知られている。旗領域の幾何学的な性質、とくに擬凹性やサイクル連結性といった性質がホッジ構造の退化とどのように関連しているかを考える。

## 3. 研究の方法

旗領域は複素旗多様体に含まれる半単純実リー群軌道であり、その研究はリー理論が深く関係している。本研究ではリー群やリー代数の性質を研究し、そこから旗領域の性質を研究した。本研究期間中に Alan Huckleberry 氏、Qaisar Latif 氏との共同研究がはじまり、彼らとの議論を通して研究を進めた。またエルミート対称領域については半単純リー代数のルート系やワイル群の構造が古くからよく知られているが、これを対称領域ではない場合に応用することを試みた。

## 4. 研究成果

(1) Huckleberry 氏、Latif 氏との共同研究の成果として、半単純実リー群のコンパクト部分群に関する構造から 2.(1) で挙げた予想を肯定的に解決することができた。さらに 2.(1) については、いくつかの例において擬凹性の次数に関する評価を与えた。これらの成果をまとめた論文は国際研究誌に採択されて出版され、いくつかの研究集会で講演を行った。

(2) 2.(2) について、シンプレクティック群が作用するコンパクトエルミート対称空間の旗領域に対し、それが1連結となる必要十分条件を決定した。この成果はワイル群のルート系への作用を考えることによって得られた。この成果についてまとめた論文を投稿し、いくつかの研究集会で講演を行った。

- (3) 研究開始当初は予定していなかったこととして、コンピュータグラフィックス・プログラミングの一般書を執筆した。これによってプログラミングの知見が深まり、ワイル群の組み合わせ論的計算で数式処理プログラミングを導入し、理論を計算によって確かめることができた。またコンピュータグラフィックスでの 3 次元図形処理において、リー理論の応用に関する知見を得た。本研究は数学の理論的研究であるため、他分野への応用は難しいと考えていたが、今後は情報科学やコンピュータグラフィックスへの応用も視野に入れて研究を進めたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tatsuki Hayama and Atsushi Kanazawa	4. 巻 受理 (to appear)
2. 論文標題 Degenerating Hodge structure of one-parameter family of Calabi-Yau threefolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Asian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hayama T., Huckleberry A., Latif Q.	4. 巻 375
2. 論文標題 Pseudoconcavity of flag domains: the method of supporting cycles	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 671-685
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s00208-018-1737-1">https://doi.org/10.1007/s00208-018-1737-1</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 10件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 One-connectivity of pseudoconcave flag domains
3. 学会等名 京都大学代数幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 擬凹旗領域のサイクル連結性
3. 学会等名 九州大学多項式数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 数学とコンピュータグラフィックス：シェーダによる数学の可視化技法
3. 学会等名 IMI Colloquium (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tatsuki Hayama
2. 発表標題 One-connectivity of pseudoconcave flag domains
3. 学会等名 Center for Mathematical Challenges (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 Processingによる可視化と装飾的模様の生成
3. 学会等名 数学ソフトウェアとフリードキュメント28 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 旗領域とホッジ理論
3. 学会等名 東京電機大学 数学講演会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 On pseudoconcavity of Mumford-Tate domains
3. 学会等名 代数幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 Pseudoconcave Mumford-Tate domains
3. 学会等名 The 6th East Asia Number Theory Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 Pseudoconcave Mumford-Tate domains
3. 学会等名 代数幾何シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 巴山竜来
2. 発表標題 Pseudoconcave flag domains
3. 学会等名 Center for Mathematical Challenges (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 巴山竜来	4. 発行年 2019年
2. 出版社 技術評論社	5. 総ページ数 304
3. 書名 数学から創るジェネラティブアート - Processingで学ぶかたちのデザイン	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----