

令和 2 年 6 月 11 日現在

機関番号：32613

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17580

研究課題名(和文)代数体の岩澤理論的拡大における類数問題

研究課題名(英文)Class number problem in Iwasawa theoretical extensions of algebraic number fields

研究代表者

森澤 貴之(Morisawa, Takayuki)

工学院大学・教育推進機構・准教授

研究者番号：50724374

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：整数全体のなす集合に、 2 など、数を少し加えて拡張した数の集合を代数体の整数環とよぶ。通常の整数の世界では素因数分解が一意的であることが知られている。代数体の整数環においても、素数の類似物があり、素因数分解を考えることができる。しかし、整数の場合と違い素因数分解が一意的であるとは限らない。この素因数分解の一意的性の崩れ具合を表すものが類数である。本研究においては、岩澤理論的拡大と呼ばれる特別な代数体の整数環を無限個考え、その類数の研究を行った。特に、いくつかのパターンにおいて、素数 1 で類数が割れない条件を求めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学の、特に整数論という分野においての重要な問題として『素因数分解が一意的である代数体の整数環は無限にあるか』というものがある。これをガウス予想という。この問題はガウス以来解かれていない難問である。これに対し、研究代表者は、岩澤理論的拡大と呼ばれる無限個の代数的整数環の集まりに対して、それらの無限個の類数を同時に取り扱う、という研究を行った。その研究により、それらの無限個の類数はある種の素数では割れない、という結果を導くことができ、ガウス予想解決への道を前進することができた。

研究成果の概要(英文)：The ring of integers of an algebraic number field is an extension of the set of integers. It is well known that the unique factorization theorem is valid in the set of integers. In the ring of integers of an algebraic number field, there are analogues of prime numbers and we can study the unique factorization theorem. However, it is not always true. We can study the collapse of it by the class number of the ring of integers of an algebraic number field. We studied the class number of rings of integers in Iwasawa theoretical extension. In particular, we showed that some prime numbers do not divide the class numbers of such rings of integers.

研究分野：整数論

キーワード：類数 イデアル類群 \mathbb{Z}_p 拡大

1. 研究開始当初の背景

有理数体 Q の有限次拡大のことを代数体と呼び、 $Cl(K)$ でそのイデアル類群を表すものとする。このイデアル類群 $Cl(K)$ とは、 K における素因数分解の一意性の崩れ具合を表す群である。イデアル類群が、純粋に整数論の研究対象として重要であることはもちろんのこと、RSA 暗号の安全性を素因数分解の一意性が握っている点を鑑みれば、イデアル類群の研究は応用上も重要であると言える。

素数 p に対し、 $A(K, p)$ でイデアル類群 $Cl(K)$ の p -部分を表すものとする。また、代数体 K に対し、 K のガロア拡大で、そのガロア群が p 進整数環 Z_p と位相群として同型になるものを、 K の Z_p -拡大と呼び、 $K(\dots)$ と書く。この代数体の Z_p -拡大は、代数体の無限列 $K = K(0)$ 、 $K(1)$ 、 \dots 、 $K(n)$ 、 \dots 、 $K(\dots)$ と見ることができる。この $K(n)$ は $K(\dots)$ と K の間の n 番目の中間体で、 K 上のガロア群が p^n 次の巡回群と同型であり、 Z_p -拡大 $K(\dots)/K$ の n -th layer と呼ばれている。

岩澤健吉が構築した岩澤理論とは、元々は、代数体の無限族 $\{K(n)\}$ のイデアル類群の p -部分 $A(K(n), p)$ が、 n が増えたときにどう変化するかを統一的に扱う、という理論であった。特に、イデアル類群の p -部分を環 $Z_p[[Gal(K(\dots)/K)]]$ 上の加群と見ること、岩澤健吉は岩澤類数公式と呼ばれる公式を示した：

(岩澤類数公式) ある整数 μ 、 N があって、 $n > N$ なら $A(K(n), p)$ の位数は p の $\lambda n + \mu p^{n+1}$ 乗

この岩澤類数公式に表れる μ 、 λ を岩澤不変量という。この岩澤不変量については、次のような予想がある：

(岩澤予想) $K(\dots)/K$ が円分的 Z_p -拡大なら $\mu = 0$

(Greenberg 予想) $K(\dots)/K$ が総実代数体上の円分的 Z_p -拡大なら $\mu = 0$

Greenberg 予想は『総実代数体上の円分的 Z_p -拡大 $K(\dots)/K$ に対し、ある N があって、 $A(K(N), p) = A(K(N+1), p) = \dots$ が成り立つ』と表現することもできる。この岩澤予想や Greenberg 予想の研究をはじめとして、岩澤類数公式周辺の問題に関しては、数多くの研究者によって研究が進められている。

また、岩澤理論は上述の Z_p -拡大に限らず、いくつかの Z_p -拡大を併せた Z_p^d -拡大、相異なる素数 p_1, p_2, \dots, p_n に対して Z_{p_1} -拡大、 Z_{p_2} -拡大、 \dots 、 Z_{p_n} -拡大を合併した拡大、非可換な p 進リー拡大などについても研究されている。本研究課題においては、これらの拡大をまとめて、(p 進の) 岩澤理論的拡大と呼ぶことにする。

2. 研究の目的

研究代表者は、『 p 進の岩澤理論的拡大における l 進的な代数的対象の振舞いを記述する』ことを、本研究課題の研究目的として研究を進めた。すなわち、 p 進の岩澤理論的拡大 $K(\dots)/K$ の中間体のイデアル類群の l -部分を統一的に扱い、その振る舞い方を記述する。

特に、 $K(\dots)/K$ が円分的 Z_p -拡大の場合には、岩澤予想や Greenberg 予想の類似の予想を考えた：

(l -有界性予想) $K(\dots)/K$ が (総実) 代数体上の円分的 Z_p -拡大であるとき、ある N があって、 $A(K(N), l) = A(K(N+1), l) = \dots$ が成り立つ。

この予想に関しては、 K が Q 上のガロア拡大であって、そのガロア群 $Gal(K/Q)$ がアーベル群の場合には、Washington によって、岩澤予想の証明と同様の手法で肯定的に解決されている。また、研究代表者は、円分的という仮定を外した場合にはこの予想は偽であるということを実証している。このことから、 l -有界性予想は岩澤予想からくる自然な予想であるといえる。応募者は本研究課題の1つの目標として、この予想の解決を目指した。

さらに、 $K(\dots)/K$ のイデアル類群の l -部分をより精密に調べ、次の問題に関する研究も行った：

(l -自明性問題) $K(\dots)/K$ が Z_p -拡大であるとき、全ての自然数 n に対して $A(K(n), l) = 0$ が成り立つのは、素数 l がどんな性質を持つ場合かを明らかにする。

3. 研究の方法

(1) 円単数の測度計算

代数体 K が有理数体 Q 上の総実なガロア拡大であって、そのガロア群 $\text{Gal}(K/Q)$ がアーベル群であるとする。このとき K 上の円分的 Z_p -拡大 $K(\)/K$ の中間体 $K(n)$ の類数の情報は単数群と円単数群が握っている。円単数群については、その構造、生成元がよくわかっているため、円単数群を調べることで $K(n)$ の類数を計算する。特に、Mahler 測度をはじめとする測度関数を用い、円単数群の生成元のサイズを計算する。その計算により、円単数群の生成元と他の単数群の元との間に 1 乗の関係式が成り立たないということを示すことで、 $A(K(n), 1) = A(K(n-1), 1)$ であることを証明する。

(2) 単数の合同式変形

上述の通り、 $K(\)/K$ が総実なアーベル拡大体上の円分的 Z_p -拡大 $K(\)/K$ のとき、その中間体 $K(n)$ の類数の情報は単数群と円単数群が握っている。そこで、単数群を精密に調べるために合同式を用いる。特に、 p 上の素イデアル P を用い、 P^k を法とした合同式で単数群に部分集合列によるフィルターを導入する。また、単数群にはガロア群からの作用があるため、ガロア加群としての部分集合列によるフィルターも同様に考える。これら 2 つのフィルターを比較することで、単数群の情報、及び、類数に関する情報を引き出す。

(3) イデアル類半群

代数体 K のイデアル類群 $Cl(K)$ とは、 K における素因数分解の一意性の崩れ具合を表す群である。これに対し、イデアル類群 $Cl(K)$ を含むより大きな集合、イデアル類半群 $S(K)$ を考える。イデアル類群 $Cl(K)$ 、及び、イデアル類半群 $S(K)$ は有限次代数体 K に対しては一致している。しかし、 K 上の Z_p -拡大 $K(\)$ においては一致しない。そこで、 $K(\)$ のイデアル類半群 $S(K(\))$ の構造を調べることで、 $K(\)$ のイデアル類群 $Cl(K(\))$ の情報を引き出し、中間体 $K(n)$ のイデアル類群 $Cl(K(n))$ を計算する。

4. 研究成果

(1) 有理数体 Q の総実なアーベル拡大体上のある種の岩澤理論的拡大の類数に対し、それが素数 l で割れないための十分条件を与える不等式の値を小さくすることに成功した。特に、小さいアーベル拡大体上の円分的 Z_2 -拡大に対しては、実際に計算機で計算できる程度の値まで抑えることができた。これにより、有理数体に 5 を添加した代数体 $K = Q(\sqrt{5})$ に対し、素数 l がある種の合同式を満たす場合には K 上の円分的 Z_2 -拡大 $K(\)/K$ の全ての中間体の類数を割らない、という結果を得た。

(2) 代数体 K が有理数体 Q の場合、 Q 上の円分的 Z_{29} -拡大 $K(\)/Q$ を考える。素数 l が 29^2 を法として原始根である場合、 l は $K(\)/Q$ の全ての中間体 $K(n)$ の類数を割らない。

(3) 代数体 K が有理数体 Q の場合、 Q 上の円分的 Z_{31} -拡大 $K(\)/Q$ を考える。素数 l が 31^2 を法として原始根である場合、 l は $K(\)/Q$ の全ての中間体 $K(n)$ の類数を割らない。

(4) 代数体 K 上のある種の岩澤理論的拡大 $K(\)$ に対し、イデアル類半群 $S(K(\))$ をイデアル類群 $Cl(K(\))$ で割った半群 $S(K(\))/Cl(K(\))$ の構造を決定した。また、この構造決定により、イデアル類半群と岩澤不変量、及び、Greenberg 予想に関係があることがわかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Konomi Yutaka, Morisawa Takayuki	4. 巻 11
2. 論文標題 On the class semigroup of the cyclotomic \mathbb{Z}_p -extension of the rational numbers	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 69 ~ 80
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1216/JCA-2019-11-1-69	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Konomi Yutaka, Morisawa Takayuki	4. 巻 223
2. 論文標題 On the class semigroup of ZS-fields and Iwasawa invariants	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 3665 ~ 3680
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2018.12.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kogoshi Yuta, Morisawa Takayuki	4. 巻 0
2. 論文標題 On the Class Numbers in the Cyclotomic - and -Extensions of the Field of Rationals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 5
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10586458.2018.1482481	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Morisawa Takayuki, Okazaki Ryotaro	4. 巻 28
2. 論文標題 Height and Weber 's Class Number Problem	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux	6. 最初と最後の頁 811 ~ 828
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/jtnb.965	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 森澤貴之
2. 発表標題 代数体の Z_p -拡大の類半群について
3. 学会等名 野々市代数的整数論（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森澤貴之
2. 発表標題 On the class semigroup of a Z_p -extension
3. 学会等名 早稲田大学整数論研究集会(2018)（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----