

令和 3 年 6 月 17 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17586

研究課題名（和文）クラスパー理論を用いた有限型不変量とMilnor不変量の幾何的解釈の研究

研究課題名（英文）Finite type invariants and Milnor invariants by clasper theory

研究代表者

小鳥居 祐香 (Kotorii, Yuka)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・准教授

研究者番号：30737143

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：絡み目ホモトピーとはアンビエントアイソトピーと自己交差によって生成される絡み目上の同値関係である。本研究の成果は主に次の3つである。4成分絡み目の絡み目ホモトピー類の不変量を構成し、絡み目ホモトピー類についても調べた。ミルナー不変量を用いてハンドル体絡み目の絡み目ホモトピー不変量を構成し、これを用いて絡み目ホモトピー類の性質について調べた。絡み目の一般化である仮想結び目のGoussarov-Polyak-Viro有限型不変量の幾何的性質について調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

絡み目の不変量をクラスパー理論を用いてクラスパーの言葉で記述することで、図式的な計算が可能となり、計算の簡略化や新しい視点を導入することができる。本研究では、絡み目の絡み目ホモトピー不変量をクラスパーを用いて再定式化を与え、そこからさらに新しい不変量を構成した。このように、クラスパーを用いた定式化は、幾何的な視点からの新しい発展が期待される。

研究成果の概要（英文）：A link-homotopy is an equivalence relation on links generated by ambient isotopies and self-crossing changes. I constructed link-homotopy invariants for 4-component links and researched properties of link-homotopy classes of links by the invariants. I also researched properties of link-homotopy classes of handle-body links by making invariants. I also researched geometric properties of Goussarov-Polyak-Viro's finite type invariants on virtual links.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：位相幾何学 結び目理論

## 1. 研究開始当初の背景

低次元トポロジーの一分野である結び目理論における下記の3つのテーマにおいて研究を行なった。

(1) 結び目理論において、絡み目の通常同値関係は、アンビエントアイソトピーによって生成される同値関係である。一方で、絡み目の"成分間の絡み方"を見る、絡み目に対する自然な同値関係として、絡み目ホモトピーと呼ばれる同値関係が Milnor によって定義されている。絡み目ホモトピーとは、アンビエントアイソトピーと自己交叉交換によって生成される同値関係である。絡み目ホモトピーの不変量としてミルナー不変量が構成され、3成分以下の同値類は完全に分類された。その後、Levine により4成分の分類が行われた。この分類は、4成分絡み目全体の集合と一対一対応する集合を与えることによって示された。しかし、具体的に与えられた2つの絡み目に対して、それらが同値であるかどうかを判別出来るものは一部の部分集合に限られていた。

(2) ハンドル体絡み目とは、有限個のハンドル体の3次元球面への埋め込みである。埋め込まれる全てのハンドル体の種数が1であるとき、ハンドル体絡み目の通常同値類は絡み目の通常同値類と同一視できる。そのため、ハンドル体絡み目は絡み目の自然な一般化となっている。さらに絡み目における絡み目ホモトピーの自然な一般化として、ハンドル体絡み目の絡み目ホモトピーと呼ぶべき同値関係を考えることができる。2成分のハンドル体絡み目については、Mizusawa が構成した絡み数を用いた不変量によって、Mizusawa-Nikkuni が絡み目ホモトピーの分類を行なっている。一方で、一般の成分については絡み目ホモトピーについての定式化も行われていなかった。

(3) 結び目の有限型不変量は Goussarov と Habiro の独立な結果によりトポロジカルな特徴付けがなされている。また Stanford は pure braid group の lower central series を用いた結び目の同値関係の族を定義し、これを用いて有限型不変量のトポロジカルな特徴付けを行なった。この同値関係は Ohyaama により定義された  $n$ -triviality から得られる同値関係と同値であることが知られている。一方、仮想結び目の理論において、Goussarov-Polyak-Viro は結び目の  $n$ -triviality の概念を拡張し、これを用いて  $n$ -同値と呼ばれる同値関係を定義した。しかし、この同値関係が仮想絡み目の有限型不変量のトポロジカルな特徴付けを与えるかどうかは判明していなかった。

## 2. 研究の目的

それぞれのテーマに対する3つの目的を述べる。

(1) 絡み目の絡み目ホモトピーの分類や区別における、計算可能な不変量を構成し、その分類に役立てることが目的であった。本研究では特に、4成分絡み目の絡み目ホモトピー類に対する説明を目的として、これまでの3成分以下の研究の一般化になるような不変量の構成及び分類を目標として行なった。

(2) 一般成分のハンドル体絡み目の絡み目ホモトピーの概念の定式化し、絡み目における自然な同値類をハンドル体絡み目に対しても導入することが目的であった。さらにその同値類の区別や分類を行うことも目的であった。本研究では特に、3成分のハンドル体絡み目や、almost trivial といった、絡み目でよく扱われるクラスに対して、ハンドル体絡み目の絡み目ホモトピーの分類を目標として行なった。

(3) 仮想絡み目の有限型不変量に対してトポロジカルな解釈を与えることが目的であった。本研究では特に、トポロジカルな解釈を与える可能性がある同値関係を定義し、Goussarov-Polyak-Viro が導入した仮想絡み目上の  $n$ -同値との関係性を調べるなど、その性質を調べることを目標とした。

## 3. 研究の方法

それぞれのテーマに対する3つの研究方法を述べる。

(1) クラスパー表示と呼ばれる絡み目の表示法を用いて、任意の絡み目の絡み目ホモトピー類を表示することが知られている。一方で、その表示は一意ではない。そのため、クラスパー変形を

行った際にクラスパー表示がどのように変化するかを考察を試みた。

(2) 絡み目のミルナー不変量は強力な絡み目ホモトピー不変量であることが知られている。ハンドル体絡み目から絡み目を構成することで、その絡み目のミルナー不変量を用い、ハンドル体絡み目の不変量の構成を試みた。ハンドル体絡み目から絡み目を構成する際には、Mizusawa の手法を用いて、ハンドル体絡み目の整係数 1 次元ホモロジー群の基底を絡み目に対応させた。また、構成した不変量があるクラスで完全不変量になることの証明には、絡み目の局所変形を与えるクラスパー変形を用いることでその証明を試みた。

(3) 仮想絡み目の同値類は、ガウス図式の同値類と同一視できることが知られている。本研究では、絡み目の有限型不変量にトポロジカルな解釈を与えた一つの方法として知られる Stanford による pure braid group の lower central series を用いる手法を、ガウス図式に対して拡張することを試みた。

#### 4. 研究成果

それぞれのテーマに対する 3 つの研究成果を述べる。

(1) Levine の結果を Habiro の導入したクラスパー理論を用いることによって、トポロジカルな手法で再構成した。Levine が与えた 4 成分絡み目全体の集合と一対一対応する集合は、基本群を用いた計算によるものであり、非常に複雑な計算を必要とする。一方で、本成果における再構成では、クラスパーを用いた局所変形によって一対一対応する集合を構成した。この新しい構成での計算量は少なく、また成分に対して対称的な構成となった。さらにこれによって、ある絡み目の部分集合に対して、その中の 2 つの絡み目が同値であるかどうかを判別出来る不変量を構成した。また、この不変量を用いた絡み目の判別例を与えた。この研究は水澤篤彦氏の協力のもと行なった。

(2) 絡み目の絡み目ホモトピーの概念をハンドル体絡み目の同値類に拡張したのもとして、HL-homotopy という概念を一般成分に対して定式化した。また、絡み目のミルナー不変量を用いて HL-homotopy に対する不変量の族を構成した。これにより、almost trivial と呼ばれるハンドル体絡み目のクラス全体の集合と一対一対応する集合を与えた。この一対一対応を用いることでそれらのクラスを区別可能な計算可能な不変量を構成した。また、この不変量を用いた具体例を計算した。この研究は水澤篤彦氏の協力のもと行なった。

(3) Stanford が導入した同値関係の概念を、pure virtual braid group の lower central series を用いて仮想絡み目及び仮想ストリング絡み目に拡張した。またこの同値関係が Goussarov-Polyak-Viro による  $n$ -同値と同値であることを示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kotorii Yuka, Mizusawa Atsuhiko	4. 巻 221
2. 論文標題 HL-homotopy of handlebody-links and Milnor's invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 715 ~ 736
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.02.073	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa	4. 巻 221
2. 論文標題 HL-homotopy of handlebody-links and Milnor's invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 715-736
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuka Kotorii	4. 巻 25
2. 論文標題 A relation between Milnor's $\mu$ -invariants and HOMFLYPT polynomials	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216516500723	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuka Kotorii	4. 巻 2004
2. 論文標題 On handlebody-links and Milnor's link-homotopy invariants	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 38-46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuka Kotorii	4. 巻 1991
2. 論文標題 Relationship between the Milnor's $\mu$ -invariant and HOMFLYPT polynomial	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 98-103
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計38件 (うち招待講演 29件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa
2. 発表標題 Levine's classification of 4-component links up to link-homotopy and its classification by claspers
3. 学会等名 East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa
2. 発表標題 On link-homotopy classes of 4-component links and clasper presentations
3. 学会等名 The 2nd Meeting on Spatial Graph Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa
2. 発表標題 On Milnor's invariants and handle body-links
3. 学会等名 Young Topologist meeting 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 Introduction to Milnor invariant -from classical knots to handlebody-links-
3. 学会等名 ハンドル体結び目とその周辺 12 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa
2. 発表標題 On Levine 's classification of link-homotopy classes of 4-component links
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa
2. 発表標題 Link-homotopy classes of 4-component links and clasper theory
3. 学会等名 Young Topologist meeting 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小鳥居 祐香, 水澤 篤彦
2. 発表標題 クラスパーを用いた4成分絡み目のlink-homotopy 類の分類
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤昇
2. 発表標題 On the degree three case of Goussarov-Polyak-Viro conjecture of knot
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会プログラム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 On random knot
3. 学会等名 第二回理研AIP数学系合同セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 結び目のトポロジー
3. 学会等名 第2回自然科学の数学的原理（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 On random models of links and linking numbers
3. 学会等名 京都大学高等研究院平岡研究室セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 On combinatorial formulas of finite type invariant for knots
3. 学会等名 大阪大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 ミルナー不変量とハンドル体絡み目の分類について
3. 学会等名 第2回岡潔女性数学者セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤昇
2. 発表標題 Goussarov-Polyak-Viro conjecture of knots with degree three and reduced Polyak algebra
3. 学会等名 電機大数学講演会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 On a local move related to Goussarov-Polyak-Viro 's finite type invariant on virtual knots
3. 学会等名 Tsuda-Gakugei Topology Workshop（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 パーシステントホモロジーを用いた位相的データ解析について
3. 学会等名 最適輸送と機械学習理論の周辺, (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 Topology and machine learning
3. 学会等名 理研AIP ニューカマーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 Goussarov-Polyak-Viro's finite type invariant and a local move on virtual knots
3. 学会等名 10th K00K-TAPU workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤昇
2. 発表標題 結び目のGoussarov-Polyak-Viro予想について
3. 学会等名 異分野・異業種研究交流会2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 Virtual $C_n$ -moves on long virtual knots
3. 学会等名 Lando-Kazarian Seminar, Higher School of Economics, Russia (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 Milnor's link-homotopy invariants for handlebody-links
3. 学会等名 Geometric Topology Seminar, Higher School of Economics, Russia (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 Virtual $C_n$ -moves on long virtual knots
3. 学会等名 Manturov seminar, Moscow State University, Russia (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 On Delta-link homotopy
3. 学会等名 Geometric Topology Seminar, Higher School of Economics, Russia (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 On Goussarov-Polyak-Viro's finite type invariants and a virtual $C_n$ -equivalence on long virtual knots
3. 学会等名 低次元トポロジーセミナー, 京都大学 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 On virtual $C_n$ -moves on virtual knots
3. 学会等名 N-KOOK セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 On higher order linking numbers for handlebody-links
3. 学会等名 幾何セミナー, 大阪大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小鳥居 祐香
2. 発表標題 結び目の数学
3. 学会等名 RIKEN iTHEMS のアウトリーチについての研究会2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuka Kotorii
2. 発表標題 On link-homotopy classes of handlebody-links
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory, 大阪市立大学数学研究所 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小鳥居 祐香
2. 発表標題 C <sub>n</sub> -move on long virtual knot and Goussarov-Polyak-Viro's
3. 学会等名 日本数学会2018 年度年会プログラム, 東京大学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuka Kotorii, Atsuhiko Mizusawa
2. 発表標題 On handlebody-links and Milnor's link-homotopy invariants
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuka Kotorii, Mizusawa Atsuhiko
2. 発表標題 On Milnor's $\bar{\mu}$ -invariants for handlebody-links
3. 学会等名 International Workshop on Spatial Graphs 2016 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 小鳥居祐香、水澤篤彦
2. 発表標題 Milnor invariant for bouquet graphs
3. 学会等名 第40回伊豆トポロジーセミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小鳥居祐香、水澤篤彦
2. 発表標題 Milnor invariant for handlebody-links
3. 学会等名 2016 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 Milnor invariant and its relationship with Alexander polynomial
3. 学会等名 筑波大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 小鳥居祐香、水澤篤彦
2. 発表標題 On Milnor's invariants for handlebody-links
3. 学会等名 茨城高専数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 小鳥居祐香
2. 発表標題 結び目の不変量
3. 学会等名 無限群と幾何学の新展開のアウトリーチについての研究会（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 小鳥居祐香、水澤篤彦
2. 発表標題 On Milnor's link-homotopy invariants for handlebody-links
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 小鳥居祐香、水澤篤彦
2. 発表標題 ハンドル体絡み目のミルナー不変量と HL-ホモトピー分類について
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	水澤 篤彦  (Mizusawa Atsuhiko)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------