様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２１ 日現在

機関番号：１２６０５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｋ１７５８９

研究課題名（和文）カンドルと分岐被覆を融合した低次元トポロジーのための新手法の提案

研究課題名（英文）New approach to low dimensional topology by using quandle and branched covering

研究代表者
畠中　英里（Hatakenaka, Eri）

東京農工大学・工学（系）研究科（研究院）・講師

研究者番号：００５３２５５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,000,000円

研究成果の概要（和文）：結び目、曲面結び目と3・4次元多様体といった幾何的な対象を完全に分類することは、低次元トポロジーの分野における一つの大きな課題である。位相不変量とは、幾何的な対象に代数的な値を与える写像である。不変量の構成の仕方によって、対象の幾何的な性質をうまく導き出し、分類問題に大きく役立たせることができる。そこで本研究では、カンドルという代数的構造と、分岐被覆という位相幾何の道具を用いて不変量を構成し、この分類問題にアプローチした。

研究成果の概要（英文）：By a covering presentation of a 3-manifold, we mean a labelled link (i.e., a link with a monodromy representation), which presents the 3-manifold as the simple 4-fold covering space of the 3-sphere branched along the link with the given monodromy. It is known that wo labelled links present a homeomorphic 3-manifold if and only if they are related by a finite sequence of some local moves. This research presents a method for constructing topological invariants of 3-manifolds based on their covering presentations. The proof of the topological invariance is shown by verifying the invariance under the local moves. As an example of such invariants, we present the Dijkgraaf-Witten invariant of 3-manifolds.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：低次元トポロジー　位相不変量　カンドル　分岐被覆　三次元多様体

1．研究開始当初の背景

群の共役演算を抽象化したカンドルは、ある条件を満たす 2 項演算を持つ集合である。結び目や曲面結び目に対して、メリディアンが生成する結び目カンドルという比較的強力な不変量が定義される。実際、結び目カンドルは結び目の型を完全に分類する。しかし、結び目カンドルどうしを比較することは一般には困難であり、そのままでは扱いづらいため、結び目カンドルから別のカンドルへの準同型を与えて分類に役立てる方法が用いられてきた。1999 年、結び目と曲面結び目のカンドルコサイクル不変量が登場し、曲面結び目の分類は特に大きく進展した。例えば、曲面結び目の 3 重点数と呼ばれる位相不変量が、いくつかの曲面結び目の種類に対して決定された。佐藤–志摩はカンドルコサイクル不変量を使い 3 重点数の下からの評価を与え、2 種類の曲面結び目についてはその 3 重点数を決定した。また、本研究代表者は、彼らの評価では対象外となってしまう曲面結び目の 3 重点数について、カンドルコサイクル不変量を使い下からの評価を与えることに成功している。最近、佐藤は本研究代表者の方法をさらに拡張することに成功し、2-twist-spun figure eight knot という曲面結び目の 3 重点数が 8 であることを決定した。曲面結び目の分類問題においては、3 重点数が決定された例は未だこの 3 例のみであり、今後も 3 重点数による分類が進展することが期待されている。

一方、向き付けられた 3 次元多様体が 3 次元球面の 3 重（以上の）分岐被覆で与えられることを、Hilden と Montesinos が同時期に示した。このとき底空間の分岐集合として結び目が現れる。Bobtcheva-Piergallini は 2005 年頃、4 重以上の分岐被覆について、結び目の局所変形を使った次図の対応を与えた。これにより結び目を 3 次元多様体のひとつの表示と見なすことができるようになった（分岐被覆表示）。

3 次元多様体の分類問題については、ホモロジー群やホモトピー群が古典的な不変量であった。1980 年代後半には Witten により、数理物理の観点から量子不変量と呼ばれるものが多様体の切り貼り技法を用いて提案された。量子不変量はその後、3 次元多様体の手術表示やヒーガード分解、単体分割といった表示方法を用いて、組み合わせ的方法により計算可能な不変量として構成された。一方で、分岐被覆表示は比較的新しい道具であり、また量子不変量の構成方法とは一見相性が良くないために、これまでにあまり考察されていない。

3 次元多様体の基本群から有限群への準同型を、分岐被覆表示としての結び目図式上に組み合わせ的方法で実現することに本研究代表者はすでに成功している。これを有限群によるカラリングと呼ぶ。このカラリングを用いて、基本群の準同型よりも詳しい情報を引き出す不変量を作ることを試み、そのような不変量を与えるレシピを考案した。さらにレシピに従って得られる不変量の具体例として、Dijkgraaf-Witten 不変量を再構成した。Dijkgraaf-Witten 不変量とは、3 次元多様体の単体分割による表示を用いて構成された量子不変量の一つである。これらの研究成果から、分岐被覆表示と量子不変量との間に関係を導くことに成功した。また一方でレシピをうまく改良すれば新しい不変量が発見できる可能性があることも明らかにした。

2．研究の目的

本研究代表者は、分岐被覆表示を使って 3 次元多様体の位相不変量を構成することに注目し、分岐被覆表示を用いることで量子不変量とは異なるタイプの不変量ができるのではないだろうか、あるいは量子不変量を新しい角度から研究することができるのではないかと考え、本研究の着想に至った。前項で示したような新しい 3 次元多様体の不変量が発見できた場合には、これまでに数多く構成されてきた 3 次元多様体の不変量の歴史に新たな一石を投じることになり、また不変量を与える代数的な理論への発展も見込まれることから、低次元トポロジーの分野において重大なインパクトを与えると考えられる。そこで本研究では、低次元トポロジーにおいて対象とするところの結び目、曲面結び目、3、4 次元多様体に対してこれらを分類するための手法を作り出すことを大きな目的とした。カンドルと呼ばれる代数的構造と分岐被覆による位相空間の構造を融合させた新しい方法によって、幾何的な対象を分類するための位相不変量を構成する。また、この新しい方法によって既存の位相不変量を再構成することにより、既存の位相不変量の性質を調べることに役立てる。分岐被覆の構造によって、異なる位相型であるとか、異なる次元であるような幾何的対象を関連づけ、位相不変量の構成上の類似からこれらを新たな族とみなして扱うという意味での分類を検討した。

3．研究の方法

本研究では以下のアプローチで研究を進めた。

(1) カンドルコサイクル不変量を用いて 3 重点数の下からの評価を与えることによって、これまでに 3 重点数が決定された曲面結び目が 3 種類報告されている。佐藤–志摩は位数が 3 の正 2 面体カンドルに関するカンドルコサイクル不変量を用いており、本申請者と佐藤の評価では位数が 5 の正二面体カンドルを扱っている。そこでその他のカンドル、たとえば位数が 7 や 9 の正 2 面体カンドルについ

て 3 重点数の評価を与えることを試みた。この評価を与えるためには、3 重点数が小さいものから順に構成可能な全ての曲面結び目の図式についてカンドルコサイクル不変量の値を計算する必要があり、ここで莫大な計算量が生じる。佐藤はこの障害を幾何的な道具を用いることで減らしている。そこで本研究代表者はこれに加えてさらに計算機を用いることでこの大量計算を可能にすることを検討した。

(2) これまでの研究や、上記(1)の研究によって得られる 3 重点数の評価法を用いることで、曲面結び目について特定のカンドルに関するカンドルコサイクル不変量の値が非自明であるならば、その 3 重点数の評価が与えられる。この評価法を有効に用いるため、曲面結び目の twist-spun 型、roll-spun 型、deform-spun 型などの構成法や、motion picture や chart、braid chart といった表示法使ってカンドルコサイクル不変量の値を計算するアルゴリズムを考案し、様々な曲面結び目についてそのカンドルコサイクル不変量の値を調べ、3 重点数の決定に役立てることを検討した。その後、3 次元多様体の分岐被覆表示を用いて不変量を構成する研究も行った。

(3) 現在までに、分岐被覆表示を用いて構成されるような不変量のレシピが与えられている。レシピの内容は、いくつかの条件をみたす写像の組を見つけることができれば、一つの不変量を得るというものである。このレシピに従って得られる不変量の具体例として Dijkgraaf-Witten 不変量が再構成されたが、他の具体例を探し、レシピに従って得られるような新しい不変量を発見することを検討した。また、レシピによる不変量構成の枠組みを拡張することによって Dijkgraaf-Witten 不変量以外の不変量を探すことを試みた。

(4) 3 次元多様体の量子不変量の再構成に向けて、分岐被覆表示を用いたアプローチを検討した。例えば、単体分割による表示を用いた Turaev-Viro 不変量や、手術表示を用いた Reshetikhin-Turaev 不変量、Heegaard 分解を用いた河野による量子不変量の再構成を試みる。また再構成の過程をできるだけ一般の枠組みに拡張し、これらの既存の不変量を一例として含むような不変量構成のレシピの作成を検討した。そしてレシピに従って得られるような新しい不変量の存在について調べた。分岐被覆表示を用いて構成される 3 次元多様体の不変量は、同時に分岐被覆表示を与える結び目の不変量にもなっているので、再構成されたこれらの量子不変量が、結び目の不変量と見た時にどのような不変量となっているのかを解明することを目指した。例えば、結び目の量子不変量として表せるか、もしくは結び目カンドルやカンドルコサイクル不変量と関係付けられるかということについて調べた。特に量子不変量とカンドルを使った不変量との直接的な関係について探求した。

(5)これまでの本研究代表者の研究において、有限群を用いて分岐被覆表示である結び目の図式上に定義したカラリングを、基本群から無限群への準同型と対応するように拡張し、Casson 不変量の再構成を試みた。Casson 不変量には、これまで様々な解釈が与えられてきた。大槻による第１次有限型不変量としての解釈、森田による曲面の写像類群の 2 次的特性類からの解釈、Taubes によるフレアーホモロジーのオイラー標数としての解釈などである。Casson 不変量を再構成することで、これらの理論と分岐被覆との関係を求め、新たな解釈を与えることを見込んで研究を進めた。

(6) 3 次元多様体に対し基本カンドルと呼ばれる不変量が定義される。これは結び目や曲面結び目に対する結び目カンドルに相当する。これまでの本研究代表者の研究により、3 次元多様体の基本群の表示を分岐被覆表示を用いて求めるアルゴリズムが与えられたが、この過程をもとに基本カンドルを分岐被覆表示を用いて組み合わせ的に求めるアルゴリズムを作る。そして具体的な 3 次元多様体の族について基本群から得られる 3 次元多様体の情報と基本カンドルから得られる情報とを比較し、基本カンドルの有効性について調べる。さらに基本カンドルを用いた不変量構成についても研究を行う。

(7) 量子不変量による分類と、幾何化予想による分類を結びつけるトピックとして、結び目の量子不変量と補空間の双曲体積とを直接に関係づける体積予想と呼ばれる予想が 2000 年頃に Kashaev-村上順-村上斉により提案され、現在まで大変注目されている。分岐被覆は本来、基本群と相性がよく、また本申請者のこれまでの研究により量子不変量の理論とも関係付けられることが分かってきているので、３次元多様体の分類問題について双方向的な研究を行い、特に体積予想の解決にアプローチする。具体的にはまず分岐被覆表示の枠組みを拡張し、境界付き 3 次元多様体の分岐被覆表示を与える。そして結び目補空間の双曲体積を分岐被覆表示を使って組み合わせ的に求めるアルゴリズムを作ることを目指した。一方で、結び目の量子不変量を、補空間の分岐被覆表示を用いて求めるアルゴリズムについても求め、両者を比較することで関係を求めることも検討した。

(8) 3 次元での理論を拡張して、4 次元 PL 多様体の不変量の構成を検討した。Bobtcheva-Piergallini は、4 次元 2−ハンドル体について曲面結び目の図式によ分岐被覆表示を与えた。これを拡張して一般の 4 次元 PL

多様体の分岐被覆表示を与える。さらに分岐被覆表示を用いて 4 次元 PL 多様体の不変量を構成する。例えば、4 次元多様体に対する Dijkgraaf-Witten 不変量を再構成することができるであろう。このような不変量は、その境界に制限すれば 3 次元多様体の不変量となり、分岐被覆表示だけを見れば曲面結び目の不変量となる。そこでそれぞれの不変量としての性質を調べたり、カンドルを用いた不変量との関係について求めた。例えば、カンドルコサイクル不変量の幾何的解釈を与えたり、3 重点数の評価に役立てることについて考えた。

４．研究成果

曲面結び目、3 次元多様体、4 次元 PL 多様体を主な研究対象として、位相不変量を用いて分類を与えること、および不変量たちの相互関係を明らかにすることを目的として、まずはカンドルを用いて曲面結び目の 3 重点数による分類を進展を目指した。次に 3 次元多様体の分岐被覆表示を用いて既存の様々な不変量を再構成すること、および新しいタイプの不変量を発見することを目指した。さらに、分岐被覆表示の枠組みを拡張し、境界付き 3 次元多様体や 4 次元 PL 多様体の分岐被覆表示を作り、それぞれの不変量構成に役立てることを目指した。最終的には、分岐被覆表示を用いて構成される不変量と、結び目や曲面結び目のカンドルを用いた不変量や、量子不変量との関係について調べることを進めた。

計算機を用いて大量計算に取り組んだが、カンドルを用いた曲面結び目の 3 重点数による分類については成果が得られなかった。しかし、分岐被覆表示を用いて主に 3 次元多様体の不変量を構成することについては進展が得られた。本研究代表者のこれまでの研究により、分岐被覆表示を用いて再構成された Dijkgraaf-Witten 不変量と、結び目のシャドウコサイクル不変量との間の関係が得られている。このような観点から、分岐被覆とカンドルの両方を用いて結び目、曲面結び目、3 次元多様体の不変量の性質に関する理解が進んだ。また、各 3 次元多様体に対して定まる基本カンドルと呼ばれる不変量があり、これを分岐被覆表示を用いて構成し、有限群を用いて行ったこれまでの研究と平行させることでも、分岐被覆とカンドルそれぞれに関する研究を合流させることを目指した。

結び目、曲面結び目と 3・4 次元多様体といった幾何的な対象を完全に分類することは、低次元トポロジーの分野における一つの大きな課題である。位相不変量とは、幾何的な対象に代数的な値を与える写像である。不変量の構成の仕方によって、対象の幾何的な性質をうまく導き出し、分類問題に大きく役立たせることができる。そこで本研究では、カンドルという代数的構造と、分岐被覆という位相幾何の道具を用いて不変量を構成し、この分類問題にアプローチした。まず初めに、ある代数的集合（カンドル）を用意し，結び目の図式に現れる各弧にカンドルの元をひとつずつ与えた。この操作の際に適切なルールを定めることにより、この操作が 3 次元多様体の基本群からある群への準同型を与えていることが分かった。次に，ルールを満足する全ての色ぬりの集合を考え，ある空間の部分集合と見なすことで，この不変量の値を定めた。さらに，上で得られた不変量が、Dijkgraaf-Witten 不変量という既存の不変量を含んでいることが分かった。このことにより、立体の組み合わせで計算されていたこの不変量をより平易に求めることが可能となった。またこの不変量は 3 次元多様体を対象とするものであったが，その構成から結び目のシャドウコサイクル不変量と呼ばれるものとも関係づけることにも進展が得られた。

カンドルを用いた不変量と量子不変量を挙げたが、これらはどちらも低次元トポロジーの分類問題に関する強力な不変量であり、現在注目されている。しかしこれら二つの方向性を直接に関係づけるトピックはほとんどない。本申請研究における成果は、両者を関係づけることができる可能性を示したもので、新しいトピックとして十分なインパクトを与えると考えられる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　0　件）

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.tuat.ac.jp/~hataken/top.html

６．研究組織
(1)**研究代表者**
　畠中英里（HATAKENAKA、 Eri）
　東京農工大学大学院工学研究院・講師
　研究者番号：00532558

(2)**研究分担者**

　なし

(3)**連携研究者**

　なし

(4)**研究協力者**

　なし