

令和元年6月10日現在

機関番号：32642

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17591

研究課題名(和文) カンドルが表す対称性と低次元結び目理論

研究課題名(英文) Quandle theory, in the context of symmetry, for knot theory

研究代表者

井上 歩 (Inoue, Ayumu)

津田塾大学・学芸学部・准教授

研究者番号：10610149

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：結び目理論とは、絡み合った紐(結び目)の性質を研究する学問である。「対称性」は、その研究において、一つの重要な視点である。「カンドル」とは、対称性の記述に優れた代数である。本研究の目的は、カンドルを用いて結び目が備える様々な対称性を明らかにすることにある。この立場に基づいて研究を行い、主として、次の成果を得た：(1) 正多胞体の対称性がある結び目と密接に関係していること。(2) ファイバー性と呼ばれる結び目の対称性がカンドルを用いて完全に記述できること。(3) 領域凍結交差交換という操作を導入し、これが領域交差交換という操作と鏡映(対称性)を通じて関係すること(清水遼氏との共同研究)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

紐状の物質の絡まりは、例えば高分子や DNA など、自然界に多く存在する。その絡まりが備える「対称性」を理解することは、物性や現象を理解する上においても、非常に重要である。本研究を通じて結び目が備える対称性に対する理解が進んだことは、結び目理論の発展のみならず、科学全般の進展においても意義がある。

研究成果の概要(英文)：A quandle is an algebra which has high compatibility with symmetry. Symmetries with which a knot is equipped are important properties to understanding the knot. The aim of this research is utilizing quandle theory to investigate several symmetries of knots. In accordance with this program, the researcher mainly obtained the following results: (1) Several quandles describing rotational symmetries of regular cells are isomorphic to knot quandles of some concrete knots. (2) The structure of a fibered knot, as a fiber bundle, is completely reflected in its knot quandle. (3) (joint work with Ryo Shimizu) We introduced a local move of a knot diagram, named a region freeze crossing change, and showed that this move is related to a region crossing change along with mirror symmetry.

研究分野：幾何学

キーワード：対称性 カンドル 結び目 ファイバー結び目 曲面結び目 正多胞体 領域交差交換

1. 研究開始当初の背景

カンドルは対称性の記述に優れた代数系である。例えば群の任意の共役類はカンドルの構造を持つ。このことから分かるように、カンドルは群よりも限定的に対称性を記述することができる。他方(任意次元の)結び目に対して、その補空間の基本群と同様にして、結び目カンドルが定まる。結び目カンドルは、結び目補空間の基本群よりも真に強力な、結び目の不変量である。

結び目は種々の対称性を備えており、その対称性は結び目カンドルにも反映されていてしかるべきであろう。しかし、そのような観点から結び目カンドルを研究する先行研究はほとんど見当たらなかった。そこで結び目カンドルが記述する対称性を研究し、それを通じて結び目が備える様々な対称性を研究するという本研究の着想に至った。

2. 研究の目的

(1) 任意の1次元結び目 k と自然数 n に対して、 n -twist-spun k と呼ばれる2次元結び目が定まる。この2次元結び目は、その構成から、周期 n の周期性(対称性)を備えている。この周期性が結び目カンドルへどのように反映されているのか調べる。さらには、この結び目カンドルがどのような空間のどのような対称性を記述しているのか調べる。

(2) 結び目の補空間には、円周を底空間とするファイバー束の構造が入ることがある。そのような構造を許容する結び目をファイバー結び目と呼ぶ。ファイバー束の構造はファイバーの対称性(モノドロミー)から定まっているが、その対称性がファイバー結び目の結び目カンドルへどのように反映されているのか調べる。

3. 研究の方法

(1) 1次元結び目 k として、それ自身が良い対称性を備える trefoil を選択する。また $n=3, 4, 5$ のケースについて考える($n=1, 2$ の場合については、すでに知られているので)。これらの場合について、具体的に結び目カンドルの表示を求め、それに付随するケーリーグラフを描くことで、周期 n および trefoil の対称性が結び目カンドルにどのように反映されているのか研究する。また、見出した対称性がどのような空間の対称性と関係するのか研究する。

(2) ファイバー結び目に対して、これが備えるファイバー束の構造に着目して、結び目カンドルの定義を再解釈する。これによってファイバー束の構造が結び目カンドルにどのように反映されているのか研究する。

4. 研究成果

(1) 3-, 4-, 5-twist-spun trefoil の結び目カンドルが、それぞれ、16-, 24-, 600-cell と呼ばれる正多胞体(正多面体に類する4次元空間内の図形)の回転対称性を表すカンドルと同型であることを示した。これらの正多胞体はみな正3角形を面に持つが、これは trefoil の結び目カンドルが正3角形のタイル貼りと関係が深いことに合致する。またこれらの正多胞体は、それぞれ、周期 3, 4, 5 の回転対称性を持つが、これは 3-, 4-, 5-twist-spun trefoil の周期性と一致する。

(2) ファイバー結び目の結び目カンドルが、ファイバーの基本群とモノドロミーを用いて完全に記述できることを示した。これは、ファイバー結び目の結び目カンドルにはファイバー束の構造が完全に反映されていることを意味する。また、応用として、次が明らかとなった：

非自明な結び目の結び目群は必ず無限位数であるが、非自明な結び目の結び目カンドルの位数は必ずしも無限とは限らない。特に2次元のファイバー結び目に対しては、結び目カンドルが有限であるための必要十分条件を与えた。

k を (p, q) 型の2橋結び目とすると、2-twist-spun k の結び目カンドルは位数 p の2面体カンドルと同型であることを示した。このことから特に、任意の2以上の自然数 n に対して、結び目カンドルはすべて同型であるが互いに同値ではない n 個の2次元結び目の組が存在することも分かった(これは田中心氏による先行研究結果(K.Tanaka, Inequivalent surface-knots with the same knot quandle, Topology Appl. 154 (2007), no.15, 2757--2763)の一般化に相等する)。

また、これらの研究を行う過程において、次の研究成果も得た。

(3) (清水遼氏との共同研究) 1次元結び目の図式に対する局所変形の一つに領域交差交換というものがある。この変形の亜種として領域凍結交差交換という変形を考え、その振る舞いについて研究を行った。図式に領域凍結交差交換を施すことは、領域交差交換を施した図式に鏡映(対称的な変換)を施すことと同値である。この観点から領域凍結交差交換の性質について研究を行い、この変形は結び目解消操作であるが、交差交換は誘導しないことを示した(領域交差交換は交差交換を誘導し、特に結び目解消操作である)。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計1件)

A. Inoue and R. Shimizu, A subspecies of region crossing change, region freeze crossing change, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 25 (2016), no. 14, 1650075-1--1650075-9

[学会発表](計10件)

井上歩, Quandle theory, a language for symmetries, USF Mathematics and Statics Colloquium, 2019年3月6日, University of South Florida, Florida, U.S.A. (招待講演)

井上歩, どうやって 3-, 4-, or 5-twist-spun trefoil の結び目カンドルと同型なカンドルを見つけたのか, 2018年度琉球結び目セミナー, 2018年12月9日, てんぶす那覇

井上歩, ファイバー結び目とカンドル理論, 東京女子大学トポロジーセミナー, 2018年4月14日, 東京女子大学(招待講演)

井上歩, ファイバー結び目の結び目カンドル, 拡大KOOKセミナー2017, 2017年8月29日, 大阪工業大学

井上歩, A watershed on the set of twist spun trefoils, N-KOOKセミナー, 2017年5月20日, 大阪市立大学文化交流センター

井上歩, A watershed on the set of twist spun trefoils, 東京女子大学トポロジーセミナー, 2017年4月22日, 東京女子大学

井上歩, 領域交差交換の亜種について, 日本数学会 2016年度秋季総合分科会, 2016年9月18日, 関西大学

井上歩, A subspecies of region crossing change, region freeze crossing change, KOOK-TAPU Workshop of knots in Tsushima Island, 2016年9月6日, 下対馬離島開発センター

井上歩, 領域凍結交差交換とその性質, 拡大KOOKセミナー2016, 2016年8月24日, 大阪電気通信大学

井上歩, 領域交差交換の亜種について~領域凍結交差交換~, 東京女子大学トポロジーセミナー, 2016年6月25日, 東京女子大学(招待講演)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

なし

6 . 研究組織

(1)研究分担者
なし

(2)研究協力者
なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。