1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１４４０１

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：１６Ｋ１７５９３

研究課題名（和文）ハンドル分解と４次元多様体の微分構造

研究課題名（英文）Handle decompositions and smooth structures of 4-manifolds

研究代表者

安井　弘一（YASUI, Kouichi）

大阪大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：７０５４７００９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では４次元トポロジーの研究を行い，主に以下の成果を得た．(1) 任意の自然数 n に対し，次の条件をみたす４次元閉多様体 X が存在することを示した：境界の b_1 が n 以下のどのような部分多様体 W に対しても，W の貼り直しでは X の全てのエキゾチック微分構造を生成できない．(2) b+>1 をみたす全ての正定値幾何学的単連結閉４次元多様体は，その Bauer-Furuta 不変量が消滅することを示した．(3) b+ と b- に関する適当な条件の下で，全ての幾何学的単連結閉４次元多様体が少なくとも一方の向きに関してシンプレクティック構造を許容しないことを示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1) ４次元多様体上の全ての微分構造を構成することは４次元トポロジーにおける重要な問題である．本研究の成果は，部分多様体の貼り直しでは全ての微分構造が得られないことを，適当な条件の下で示している．

(2),(3) 「全ての単連結閉４次元多様体は幾何学的単連結か？」という問題は，微分構造の分類問題と密接に関係する懸案の問題であり，４次元以外の全ての次元で肯定的に解決されている．本研究の成果はこの問題を否定的に解決するためのアプローチを与えている．一方，非常に多くの４次元多様体が幾何学的単連結であるため，これらの成果は単連結閉４次元多様体の非常に広いクラスに対して成立する新しい性質を与えてもいる．

研究成果の概要（英文）：We studied 4-dimensional topology. Our main achievements are as follows. (1) We showed that, for any positive integer n, there exists a simply connected closed 4-manifold X such that for any compact codimension zero submanifold W with boundary having first Betti number bounded by n, the set of all smooth structures on X cannot be generated from X by twisting W. (2) We showed that every geometrically simply connected positive definite closed 4-manifold with b+>1 has a vanishing Bauer-Furuta invariant. (3) We showed that, under a mild condition on b+ and b-, every geometrically simply connected closed 4-manifold admits no symplectic structure for at least one orientation of the manifold.

研究分野：位相幾何学

キーワード：トポロジー　４次元多様体　微分構造　ハンドル分解　コルク　Stein 構造　結び目　Bauer-Furuta 不変量

１．研究開始当初の背景

本研究課題の主な研究対象は 4 次元多様体の微分構造である． 4 次元多様体の微分構造の研究は，1980 年代以降に 3 件のフィールズ賞受賞研究を輩出するなど，活発に研究され，多くの応用を持つ．しかし他の次元と異なり，未だに全体の様相が全く把握できていない．主要課題はエキゾチック(同相だが微分同相でない) 微分構造の存在問題であり,興味深い様々な具体例の構成や新たな現象の発見が必要とされている.

２．研究の目的

本研究の主な目的は,4 次元多様体の微分構造のふるまいを様々な観点から探ることである．具体的には，主に以下の観点から探ることが本研究課題申請時における目的である．

(1) コルクを用いた 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の構成.
(2) 接触 3 次元多様体の Stein 充填の微分構造
(3) 5 次元接触トポロジーによる 4 次元 Stein 充填の微分構造の区別
(4) 枠付き結び目が表示する 4 次元多様体の微分構造と結び目理論への応用

３．研究の方法

具体例の構成については，ハンドル体や Lefschetz ファイバー空間 などの構成法と，コルクや対数変換などの手術とを組み合わせることで研究を進める．微分構造の区別や性質の解明には，ゲージ理論，Stein 多様体，シンプレクティック多様体などによる微分構造への制約を用いる．研究を進めるために，国内外の研究集会に参加・発表し，さらにセミナーや研究集会を開催し，情報交換を行う.

４．研究成果

以下，主な成果を個別の研究の背景とともに述べる．

(1) 4 次元多様体の微分構造を分類するためには，まず与えられた 4 次元多様体上の全ての微分構造を構成する必要があるが,全ての微分構造が構成できているような 4 次元多様体は現在に至るまで 1 つもない．そこで研究代表者は「任意の 4 次元多様体 X は，部分多様体 W であって，X の全てのエキゾチック微分構造が W の貼り直しで得られるようなものを許容するか？」という問題を考察した．実際，5 次元以上の球面に対しては，全てのエキゾチック微分構造がこのようにして得られることがよく知られている．また，多くの 4 次元多様体に対しても，無限個のエキゾチック微分構造がこのようにして得られている．しかし，この問題が肯定的であるような 4 次元多様体 X の例は一つも得られていない.

本研究課題において，研究代表者はこの問題を部分的に否定的解決した．より詳しくは,「任意の自然数 n に対し，次の条件をみたす単連結閉 4 次元多様体 X が存在する：境界の 3 次元多様体の第 1 ベッチ数 b_1 が n 以下のどのような部分多様体 W に対しても，W の貼り直しでは X の全てのエキゾチック微分構造を生成できない.」ということを示した．この結果の系として，全ての 4 次元多様体の全てのエキゾチック微分構造を（固定された埋め込みに関する）貼り直しで生成するような，普遍的な境界付き 4 次元多様体が存在しないことを示した.さらに，貼り直し操作だけでなく，手術に関しても同様の成果を得た．なお，これらの結果を証明するために 4 次元多様体の最小種数関数の新しい応用法を与えている.成果をまとめた論文は学術誌 Transactions of the American Mathematical Society から掲載受理された.

(2) 1 ハンドルのないハンドル分解を持つ多様体は幾何学的単連結と呼ばれる.「全ての単連結閉多様体は幾何学的単連結か？」という古典的問題は，4 次元以外の全ての次元で正しいことがよく知られているが，4 次元では未解決なままである．4 次元球面や複素射影平面のエキゾチック微分構造の存在問題とも密接に関連する懸案の問題である．なお，非常に多くの単連結閉４次元多様体が幾何学的単連結であることが知られている．また，Harer-Kas-Kirby によって１ハンドルを必要とする候補が 1980 年代に与えられていたが，2000 年代に研究代表者らによってその候補は 1 ハンドルが不要であることが示されていた.

本研究課題において,研究代表者は幾何学的単連結閉 4 次元多様体の微分構造の性質解明に取り組み，主に以下の成果を得た.

① b+>1 の全ての正定値幾何学的単連結閉 4 次元多様体はその Bauer-Furuta 不変量（安定コホモトピー Seiberg-Witten 不変量）が自明であることを示した．正定値単連結閉 4 次元多様体に対するエキゾチック微分構造の存在問題は重要な未解決問題であるが，この結果により，少なくとも非常に広いクラスである正定値幾何学的単連結閉 4 次元多様体

については，既存の不変量の中で最も強力な Bauer-Furuta 不変量ですらエキゾチック微分構造を検出できないことが従う．なお， Hom-Lidman (J. Eur. Math. Soc., to appear) は Ozsvath-Szabo の 4 次元多様体不変量に関して同様の自明性を証明していたが，Bauer-Furuta 不変量は Seiberg-Witten 不変量の精密化であり，Ozsvath-Szabo 不変量よりはるかに強力である．また，彼らの証明は Seiberg-Witten 理論には適用できない議論を用いているが，研究代表者の証明は全く異なるアプローチによるものであり，Ozsvath-Szabo 不変量と等価と予想されている Seiberg-Witten 不変量に対しても（Bauer-Furuta 不変量を用いない）証明を与えた．

② b+ と b- に関する適当な条件の下では、全ての幾何学的単連結閉 4 次元多様体が少なくとも一方の向きに関してシンプレクティック構造を許容しないことを示した．この性質は b+>1, b->1 をみたす全ての単連結閉 4 次元多様体に対して成立することが期待されているが，この結果によって単連結閉 4 次元多様体の非常に広いクラスに対して成立することが従う．

①，②の成果は，非常に多くの単連結閉 4 次元多様体に共通する性質，及び，1 ハンドルが必要な多様体の構成へのアプローチを与えている．また，これらの証明は Bauer-Furuta 不変量の全く新しい使用法を与えている．現在はこの手法をさらに応用した研究を進めている．①，②の成果をまとめた論文は学術誌 Geometry & Topology から掲載受理された．

(3) 可縮な 4 次元多様体とその境界の対合写像の組は，対合写像が 4 次元多様体の内部の（自己同相写像に延びるが）自己微分同相写像に延びないときコルクと呼ばれる．コルクは低次元トポロジーに様々な応用を持つ重要な研究対象である．絡み数が 1 の 2 つの自明結び目から成る 2 成分の対称絡み目は，ハンドル体図式を経由することで自然に可縮な 4 次元多様体を表示し，さらに境界の対合写像を誘導する．絡み目が Stein 構造に関して適当な条件をみたすとき，このようにして得られる組がコルクであることがよく知られている．一方，コルクではないような組を与える絡み目も 4 次元多様体間の非自明な微分同相写像の構成に有用であるが，そのような絡み目の例は，自明な例であるホップ絡み目のみであった．

本研究課題において，研究代表者はホップ絡み目以外のそのような絡み目の初の例を無限個与えた．さらに，そのような例として，可縮 4 次元多様体が Stein 構造を持つようなものを選べることを示した．これらの成果をまとめた論文は arXiv で公表している．

(4) 4 次元 Stein 多様体は 5 次元オープンブックを経由することで 5 次元多様体上の接触構造を与える．そこでこの対応による 4 次元 Stein 多様体の微分構造と 5 次元多様体の接触構造の関係が興味深い．

本研究課題において研究代表者は，適当な条件の下で 4 次元 Stein 多様体の無限族を考えたとき，対応する 5 次元多様体の接触構造が互いに異なれば，無限族のうちの少なくとも無限個の 4 次元 Stein 多様体は互いに微分同相ではないことを示した．特に， 4 次元多様体の微分構造が 5 次元多様体の接触構造によって粗く区別されることを示した．以上の成果は論文にまとめ arXiv で公表している．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 4 件）

(1) Kouichi Yasui, Geometrically simply connected 4-manifolds and stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants, to appear in Geometry & Topology，査読有．

(2) Kouichi Yasui, Nonexistence of twists and surgeries generating exotic 4-manifolds, to appear in Transactions of the American Mathematical Society，査読有．

(3) Kouichi Yasui, On twists and surgeries generating exotic smooth structures, Intelligence of Low-dimensional Topology, RIMS Kokyuroku 2099 (2018), 30-35，査読無．
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2099-03.pdf

(4) Tian-Jun Li, Cheuk Yu Mak and Kouichi Yasui, Calabi-Yau Caps, Uniruled Caps and Symplectic Fillings, Proceedings of the London Mathematical Society 114 (2017), no. 1, 159-187，査読有．
https://doi.org/10.1112/plms.12007

〔学会発表〕（計 13 件）

(1) 安井 弘一，Minimal genus functions and smooth structures of 4-manifolds，微分トポ

ロジー19～4 次元多様体に埋め込まれた曲面とその手術～，立命館大学（東京キャンパス），2019 年 3 月 13 日．

(2) Kouichi Yasui, Minimal genus functions and smooth structures of 4-manifolds, Knotted surfaces in 4-manifolds, University of Massachusetts Amherst (アメリカ), 2018 年 10 月 27 日.

(3) Kouichi Yasui, Geometrically simply connected 4-manifolds and stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants, Four Dimensional Topology, 大阪市立大学, 2018 年 9 月 9 日.

(4) Kouichi Yasui, Corks and exotic 4-manifolds represented by framed knots, The topology and geometry of low-dimensional manifolds: a celebration of the mathematics of Bob Gompf, University of Texas at Austin (アメリカ), 2018 年 7 月 13 日.

(5) 安井 弘一, Nonexistence of twists and surgeries generating exotic 4-manifolds, Intelligence of Low-dimensional Topology, 京都大学, 2018 年 5 月 31 日.

(6) 安井 弘一, Nonexistence of twists and surgeries generating exotic 4-manifolds, 九州大学金曜トポロジーセミナー, 九州大学, 2018 年 5 月 11 日.

(7) 安井 弘一, Nonexistence of twists and surgeries generating exotic 4-manifolds, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会, 山形大学, 2017 年 9 月 11 日.

(8) Kouichi Yasui, Exotic Stein fillings of contact 3-manifolds, The Third Pacific Rim Mathematical Association (PRIMA) Congress, Instituto Tecnologico de Oaxaca (メキシコ), 2017 年 8 月 14 日.

(9) Kouichi Yasui, Nonexistence of twists and surgeries generating exotic 4-manifolds, Low Dimensional Topology and Gauge Theory, Casa Matematica Oaxaca (メキシコ), 2017 年 8 月 7 日.

(10) 安井 弘一, 4 次元多様体の微分構造とコルク, 大阪大学談話会, 大阪大学, 2017 年 4 月 22 日.

(11) 安井 弘一, Nonexistence of twists and surgeries generating exotic 4-manifolds, 研究集会「4次元トポロジー」, 大阪市立大学, 2016 年 11 月 27 日.

(12) 安井 弘一, Contact 5-manifolds and smooth structures on Stein 4-manifolds, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 関西大学, 2016 年 9 月 15 日.

(13) 安井 弘一, 4次元シュタイン多様体と結び目, 第 63 回トポロジーシンポジウム, 神戸大学, 2016 年 7 月 6 日.

〔その他〕

(1) ホームページ等
https://researchmap.jp/kyasui/

(2) 受賞
Tian-Jun Li, Cheuk Yu Mak and Kouichi Yasui, Distinguished Paper Award of 2017 ICCM Best Paper Award, The International Consortium of Chinese Mathematicians, 2017 年 12 月.

(3) アウトリーチ活動
安井 弘一, トポロジーと図形の見方, 大阪大学理学部, 2018 年 8 月 9 日 (高校生対象).

6．研究組織

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。