

令和 3 年 5 月 30 日現在

機関番号：16301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17595

研究課題名（和文）粗Baum-Connes予想に関わる粗幾何学

研究課題名（英文）Coarse geometry related to the coarse Baum-Connes conjecture

研究代表者

尾國 新一（Oguni, Shin-ichi）

愛媛大学・理工学研究科（理学系）・教授

研究者番号：00549446

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：粗Baum-Connes予想に関わる粗幾何学について研究を進めた。また、粗幾何学に深くかかわる幾何学的群論の研究も進めた。実際、深谷友宏氏（首都大学東京）との共同研究において粗凸距離空間の導入と研究を行い、深谷友宏氏と山内貴光氏（愛媛大学）との共同研究においてGromov積の一般化の導入と研究を行い、加藤本子氏（愛媛大学）との共同研究においてArtin-Tits群の非シリンダー的双曲性に関わる研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

粗Baum-Connes予想に関わる粗幾何学について研究を進めた。粗Baum-Connes予想は、Novikov予想など微分トポロジーへの応用があるということ、および、ヒルベルト空間への粗埋め込み可能性や漸近次元の有限性などの粗幾何学における重要な性質の応用先であるということから、幾何学者やトポジストを中心とした様々な研究者に興味を持たれている。粗幾何学は幾何学的群論とも深く関わり、この観点からの研究も進めた。本研究は粗幾何学にとどまらず、幾何学の進展に寄与するものであったと思われる。

研究成果の概要（英文）：We studied coarse geometry related to the coarse Baum-Connes conjecture. Also we studied geometric group theory which is deeply related to coarse geometry. Actually we introduced coarsely convex spaces and studied them with Tomohiro Fukaya (Tokyo metropolitan university). Also we introduced generalized Gromov products and studied them with Tomohiro Fukaya and Takamitsu Yamauchi (Ehime university). Also we studied acylindrical hyperbolicity of Artin-Tits groups with Motoko Kato (Ehime university).

研究分野：幾何学

キーワード：粗Baum-Connes予想 粗凸距離空間 粗ホモトピー 粗コンパクト化 双曲性 非正曲率性

1. 研究開始当初の背景

粗幾何学では、非コンパクトな完備 Riemann 多様体や語距離を入れた有限生成な無限群などの非有界な固有距離空間を「遠く離れて眺めることで見える幾何構造」、すなわち粗構造に着目して研究する。非コンパクトな完備 Riemann 多様体上の Dirac 型作用素は、閉 Riemann 多様体上のそれと異なり、一般に Fredholm 作用素ではないため、整数値の Fredholm 指数を考えることはできない。そこで Roe [Mem. Amer. Math. Soc., (1993)]は、Dirac 型作用素の「指数」を Roe 環の K 群に値をとるように定義し、さらに、Dirac 型作用素を粗 K ホモロジーのサイクルと考え、「指数」をとることをエンコードする写像として、粗 K ホモロジーから Roe 環の K 群への粗組み立て写像を定義した。粗組み立て写像は、考えている完備 Riemann 多様体の粗構造にしかよらず、実際には、完備 Riemann 多様体とは限らない固有距離空間に対して定義される。「『良い』固有距離空間に対して粗組み立て写像が同型写像(または単射)になる」であろうというのが粗 Baum-Connes 予想(または粗 Novikov 予想)で 1990 年代前半に定式化されて以来、粗幾何学の最も重要な課題の一つであり、現在でもそうである(この予想には、あるエクスペンダーグラフ列などの反例があるので「良い」という文言をつけたが、例えば、語距離を入れた有限生成群に限定すれば反例は知られていない)。また、粗組み立て写像の研究は、Atiyah-Singer の指数定理に関連し、微分トポロジー(高次符号数のホモトピー不変性を主張する Novikov 予想や非球面的閉多様体上の正スカラー曲率 Riemann 計量の非存在を主張する予想)への応用を持つこともあり、多くの幾何学者から興味を持たれている。粗 Baum-Connes 予想に関して、「Hilbert 空間に粗埋め込み可能で(語距離を入れた有限生成群のような)粗有界幾何を持つ距離空間は粗 Baum-Connes 予想を満たす」ことを主張する Yu の定理は、最も強力な肯定的結果である [Invent. Math., (2000)]。この定理により、従順群、双曲群、線形群、写像類群など幾何学的群論で重要な多くのクラスの群が粗 Baum-Connes 予想を満たすことがわかる。Yu の定理以後の進展としては、Yu による性質 A という粗幾何学的従順性の研究が盛んであった。また、Yu の定理の改良により、エクスペンダーグラフ列のような Hilbert 空間に粗埋め込み可能でない距離空間を取り扱おうというものもあった(Chen-Wang-Yu [Adv. Math., (2013)]など)。一方で、私は深谷友宏氏との共同研究において、Yu の定理以前の Higson-Roe による研究 [London Math. Soc. Lecture Note Ser., (1995)]を発展させ、Yu の定理を適用できるとは限らない距離空間や離散群のあるクラス(適切な条件を満たす相対的双曲群、CAT(0)群、およびこれらの直積群など)に対して、粗 Baum-Connes 予想を証明し、さらに粗組み立て写像の具体的な計算も行った。

2. 研究の目的

研究開始当初の背景を踏まえて、本研究では、Higson-Roe に始まる手法を私と深谷友宏氏の共同研究に引き続き、さらに発展させ、粗 Baum-Connes 予想を満たす新しい例、および、満たさない新しい例があることを明らかにすることを目的とした。また、Yu の定理によって(具体的計算を伴わない形で)粗 Baum-Connes 予想が成り立つとわかっている例に対しても、Higson-Roe に始まる手法による別証明を与え、粗組み立て写像を具体的に計算することも目的とした。また、粗 Baum-Connes 予想に限らず、粗幾何学、あるいは、粗幾何学に関係の深い幾何学的群論において、新たな知見を得、幾何学の進展を促すことを期待した。

3. 研究の方法

粗 Baum-Connes 予想に関わる粗幾何学はもちろん、直接的な関係が明らかではないものも含めた粗幾何学、および、粗幾何学に関係の深い幾何学的群論に関して、広く、国内外の研究動向を把握しつつ、研究を進めるように努めた。また、深谷友宏氏や山内貴光氏や加藤本子氏などと議論を行うなどにより研究を深めた。様々な研究集会に出席し講演を行うなどにより自身の研究紹介を行うことで、多くの研究者と情報交換や議論をスムーズに行えるように努めた。さらに、「第 5 回幾何学的群論ワークショップ」(2019 年 3 月 5 日-2019 年 3 月 8 日)、「ワークショップ：幾何学的群論の新展開」(2018 年 2 月 5 日-2018 年 2 月 8 日)、「第 3 回幾何学的群論若手勉強会」(2017 年 3 月 7 日 - 2017 年 3 月 10 日)のようなワークショップを深谷友宏氏らと企画することで、幾何学的群論の若手を中心にザックバランに研究交流を行う場を設けることで、近い分野の若手研究者とつながりを持ち、最新の研究動向にも注意を払うようにした。

4. 研究成果

粗 Baum-Connes 予想に関わる粗幾何学について研究を進めた。また、粗幾何学に深くかかわる幾何学的群論の研究も進めた。以下、三つしるす。

(1) 深谷友宏氏との共同研究において粗凸距離空間の導入と研究を行った。特に、そこで得られた結果から、今まで粗 Baum-Connes 予想が正しいことが知られていなかった例(large-type の Artin-Tits 群など)が粗 Baum-Connes 予想を満たすことが明らかになった。次の論文として出版するに至った。

'A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture', Tomohiro Fukaya, Shin-ichi Oguni, Journal of Topology and Analysis, 12(03) 857 - 895, 2020.

(2) 深谷友宏氏と山内貴光氏との共同研究において Gromov 積の一般化の導入と研究を行った。特に、一般化された Gromov 積と、粗 Baum-Connes 予想の研究で重要なコロナと呼ばれる境界の関係を明らかにした。次の論文として出版するに至った。

'Coarse compactifications and controlled products', Tomohiro Fukaya, Shin-ichi Oguni, Takamitsu Yamauchi, Journal of Topology and Analysis, online, 2020.

(3) 加藤本子氏 (愛媛大学) との共同研究において Artin-Tits 群の非シリンダー的雙曲性に関わる研究を行った。次の論文として出版するに至った。

'Acylindrical hyperbolicity of Artin-Tits groups associated to triangle-free graphs and cones over square-free bipartite graphs', Motoko Kato, Shin-ichi Oguni, Glasgow Math. J., online, 2020.

本研究は粗幾何学にとどまらず、幾何学の進展に寄与するものであると思われる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Mineyama Ryosuke, Oguni Shin-ichi	4. 巻 187
2. 論文標題 On coarse geometric aspects of Hilbert geometry	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Monatshefte für Mathematik	6. 最初と最後の頁 665 ~ 680
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00605-018-1171-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fukaya Tomohiro, Oguni Shin-ichi	4. 巻 12
2. 論文標題 A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 857 ~ 895
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793525319500675	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fukaya Tomohiro, Oguni Shin-ichi, Yamauchi Takamitsu	4. 巻 online
2. 論文標題 Coarse compactifications and controlled products	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 1 ~ 26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793525321500102	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 KATO MOTOKO, OGUNI SHIN-ICHI	4. 巻 online
2. 論文標題 ACYLINDRICAL HYPERBOLICITY OF ARTIN-TITS GROUPS ASSOCIATED WITH TRIANGLE-FREE GRAPHS AND CONES OVER SQUARE-FREE BIPARTITE GRAPHS	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Glasgow Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1 ~ 14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0017089520000555	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 尾國新一
2. 発表標題 Artin群の非シリンダー的双曲性について
3. 学会等名 第15回代数・解析・幾何学セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shin-ichi Oguni
2. 発表標題 On a coarse Cartan-Hadamard theorem
3. 学会等名 AMS Sectional meeting (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 尾國 新一
2. 発表標題 Coarsely convex spaces and a coarse Cartan-Hadamard theorem
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin-ichi Oguni
2. 発表標題 On a coarse Cartan-Hadamard theorem
3. 学会等名 Rigidity School The Final Meeting
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 尾國新一
2. 発表標題 On coarse homotopy
3. 学会等名 集合論的・幾何学的トポロジーの動向と諸分野との連携
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 尾國新一
2. 発表標題 粗幾何版アダマール・カルタンの定理とその応用
3. 学会等名 松山TGSAセミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 尾國新一
2. 発表標題 粗凸距離空間入門
3. 学会等名 ワークショップ：幾何学的群論の新展開
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 尾國新一
2. 発表標題 粗幾何版アダマール・カルタンの定理について
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 尾國新一
2. 発表標題 粗ホモトピーについて
3. 学会等名 第3回幾何学的群論若手勉強会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

尾國 新一 (research map) https://researchmap.jp/oguni.shin-ichi 尾國 新一 (愛媛大学教育研究者要覧) https://yoran.office.ehime-u.ac.jp/Profiles/4/0000301/profile.html

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------