様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ５ 月 ２６ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ１７５９８

研究課題名（和文）微分幾何学的手法によるカラビ・ヤウ多様体と特殊ラグランジュ部分多様体の研究

研究課題名（英文）On the Calabi-Yau manifolds and the special Lagrangian submanifolds from the view point of differential geometry

研究代表者
服部　広大（Hattori, Kota）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・准教授

研究者番号：３０５８６０８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：微分幾何学の文脈において、自明な標準束をもつリッチ平坦ケーラー計量をもつ複素多様体をカラビ・ヤウ多様体という。さらに強く、正則シンプレクティック形式をもつ場合は超ケーラー多様体と呼ばれる。
完備リッチ平坦多様体がユークリッド的な体積の増大度を持ち、無限遠点における接錐の一つが滑らかな切断を持つならば、無限遠点における接錐がただ一つしかないことがコーディングとミニコッチによって証明されている。これに対して研究代表者は、無限遠点における接錐のモジュライ空間が円周と同相になるような超ケーラー多様体を発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
カラビ・ヤウ多様体の中でも特に超ケーラー多様体は美しい性質を持つ一方で、コンパクトな場合は具体例の構成をすることすら難しいほど珍しい多様体である。しかしながら、非コンパクトな場合は豊富に例を構成する手法がいくつか知られており、様々な性質をもつ超ケーラー多様体の存在が期待される。本研究課題によって、非コンパクトな超ケーラー多様体は、極めて多彩な漸近挙動を示しうることが証明された。この結果によって、非コンパクトなリッチ平坦多様体に関する研究は極めてワイルドな幾何学と結びつく可能性が期待される。

研究成果の概要（英文）：In the context of differential geometry, Calabi-Yau manifolds are Ricci-flat Kaehler manifolds with trivial canonical bundle. Moreover, if the manifolds have holomorphic symplectic form, then they are called the hyper-Kaehler manifolds.
It is shown by Colding and Minicozzi that if a complete Ricci-flat manifold with maximal volume growth and one of the tangent cone at infinity has a smooth cross section, then the tangent cone at infinity is unique. We investigate the asymptotic behavior of one of the hyper-Kaehler manifolds constructed by Anderson-Kronheimer-LeBrun, which is known to have the irrational volume growth, then show that the moduli space of the tangent cones at infinity of it is homeomorphic to the circle.

研究分野：微分幾何学

キーワード：超ケーラー多様体　複素構造　リッチ曲率　無限遠点における接錐　グロモフ・ハウスドルフ収束

１．研究開始当初の背景

リーマン多様体に対して定義されるリッチ曲率は、リーマン多様体上で定義される基本的な局所不変量であり、多様体の大域的な挙動をもコントロールする重要な概念である。リッチ曲率が恒等的にゼロとなるようなリーマン多様体をリッチ平坦多様体と言い、ユークリッド空間がその典型例である。非コンパクトな距離空間の漸近的性質を調べる一つの方法は、無限遠点における接錐を考えることである。無限遠点における接錐とは、距離空間を無限の彼方から眺めたときに現れる空間のことである。例えば、xy 平面上に描いた反比例のグラフを非常に遠くから眺めると、x 軸と y 軸、すなわち漸近線に重なって見えるであろう。この場合は漸近線が反比例のグラフの無限遠点における接錐ということになる。

一般の完備リッチ平坦多様体に対して、無限遠点における接錐は少なくとも一つは必ず存在することが、グロモフのコンパクト性定理によって知られており、さらに体積の増大度がユークリッド的ならばその接錐は距離空間錐であることが、チーガーとコールディングによって示されている。また、無限遠点の接錐の少なくとも一つが滑らかな切断を持つならば、それ以外に無限遠点の接錐が存在しないこと、すなわち一意性が成立することがコールディングとミニコッチによって証明された。

２．研究の目的

本研究課題の目的は、コールディング-ミニコッチの一意性定理が成り立つ状況をさらに詳しく研究することである。具体的には、一意性定理の仮定が本質的に必要であるかどうかを調べる。例えば、非負リッチ曲率を持つ完備リーマン多様体で、体積の増大度がユークリッド的かつ無限遠点における接錐の一つが滑らかな断面を持ちながら、無限遠点における接錐のモジュライ空間が連続濃度となるような例がペレルマンによって構成され、のちにコールディングとネイバーによって系統的な具体例の構成法が確立された。このことから、リッチ平坦性が一意性のために本質的であることが分かる。これに対し本研究課題では、体積の増大度がユークリッド的であることが本質的であるかどうかを明らかにする。

３．研究の方法

リーマン多様体の体積の増大度とは、半径 r の測地球の体積の増大度のことである。非負リッチ曲率をもつ n 次元リーマン多様体に対し、このオーダーは大きくても半径の n 乗であることが知られており、特に半径の n 乗と同じオーダーの時にユークリッド的という。上記の研究目的のためには、まずは体積の増大度がユークリッド的でないリッチ平坦多様体の具体例が必要となる。アンダーソン、クロンハイマー、ルブランの 3 人は、ベッチ数無限大となるような 4 次元超ケーラー多様体、特にリッチ平坦多様体の具体例を構成した。研究代表者は 2011 年に、この多様体の体積の増大度を計算し、ユークリッド的でないことを証明した。このリッチ平坦多様体を以下では A∞型超ケーラー多様体と呼ぶこととし、この多様体の無限遠点における接錐を具体的に研究した。

４．研究成果

研究代表者は、ある A∞型超ケーラー多様体に対してその無限遠点における接錐の全体のなすモジュライ空間を研究し、その構造を完全に決定した。特に、そのモジュライ空間が１点でないこと、すなわち一意性が成り立たないことを証明した。

（１）モジュライ空間の構造

非コンパクトな完備距離空間と、その中の１点を固定する。この点を基点と呼ぶことにする。無限遠点における接錐は、ゼロに収束する正の実数列を取るごとに、その縮小列の点付きグロモフ・ハウスドルフ極限として定義される。この極限は、基点のとり方には依存しないが、縮小率となる正の実数列のとり方に依存しうる。正の実数列のあらゆるとり方に対して、現れうる点付きグロモフ・ハウスドルフ極限をすべて集め、それらを点付き等長同型写像による同値関係によって商集合をとったものをモジュライ空間と定める。このモジュライ空間は、点付きグロモフ・ハウスドルフ位相に関して位相空間の構造をもつ。また、ある点付き距離空間が無限遠点における接錐となるならば、正の実数ごとにその値を拡大率または縮小率とするような相似変換もまた無限遠点における接錐となる。従って、モジュライ空間には正の実数全体 R_+のなす乗法群が連続的に作用する。以上より、モジュライ空間の構造を決定することは、位相構造と R_+作用に関する軌道分解を明らかにすることを意味する。

（２）A∞型超ケーラー多様体

A∞型超ケーラー多様体は、ギボンズ-ホーキング計量の一般化として、3 次元ユークリッド空間の中の可算無限個の点の集合から構成される。この点集合が、A∞型超ケーラー多様体の幾何学的性質を決定する。本研究では、この点集合がある座標軸上に全て乗っている状況を考える。これは、得られた A∞型超ケーラー多様体に S^1 の対称性を仮定することに他ならない。この仮定は本質的ではないが、漸近解析を出来るだけ単純化するための工夫である。点の配置の仕方によって、体積の増大度などの漸近挙動が大きく変わる。例えば、点を密に配置するほど体積の増

大度は小さくなることが観察できる。そこで、原点から距離 10 までは点が密になるよう配置し、距離 10 から 100 までは点を配置せず、距離 100 から 1000 までは密になるように配置する、というように、密と疎が交互に現れるよう配置していくことで、無限遠点における接錐が複数現れるような工夫を施す。

（3）主結果

上記のような工夫を施すことによって、無限遠点における接錐のモジュライ空間が以下のような性質を満たす 4 次元の超ケーラー多様体を明示的に構成した。

① モジュライ空間は、点付きグロモフ・ハウスドルフ位相に関して円周と同相である。特に、無限遠点における接錐は一意に定まらない。

② モジュライ空間を R_+作用について軌道分解すると、6 つの軌道が得られる。このうち 3 つは作用の固定点であり、その任意の 2 点を結ぶ数直線と同相な軌道がある。数直線と同相な軌道上では R_+は自由かつ推移的に作用する。

③ モジュライ空間の各点に対応する接錐は、3 次元ユークリッド空間と同相である。

④ 作用の固定点に対応する接錐のうち、1 つは 3 次元ユークリッド空間と等長であり、もう 1 つは 3 次元ユークリッド空間内の半径 1/2 の 2 次元球面の距離空間錐と等長である。残りの 1 つは、いかなる距離空間錐とも等長同型でない。リッチ平坦多様体の無限遠点における接錐であって尚且つ相似変換に対して不変でありながら、距離空間錐と等長でない距離空間の例は、研究代表者の知る限り本研究で得られた例以外には知られていない。

（4）グロモフ・ハウスドルフ収束を用いたベクトル束上のラプラシアンのスペクトル収束

ここまでの研究成果は、与えられたリーマン多様体の縮小列に対して、そのグロモフ・ハウスドルフ収束を論じることによって得られた。研究代表者は、本研究課題の遂行過程で習得した研究手法が、本研究課題の対象を大きく超えて、より広い幾何学的な問題と関連しうることに気づいた。例えばチーガーとコールディングは、リッチ曲率が下に有界なコンパクトリーマン多様体の列がある測度距離空間に測度付きグロモフハウスドルフ収束するときに、ラプラシアンの固有値の収束を証明した。このような研究は、ベクトル束上の接続ラプラシアンに対してもロットや加須栄によって一般化されている。研究代表者は、このような研究の枠組みが幾何学的量子化に対し上手く当てはまることを発見し、ラグランジュファイブレーションをもつケーラー多様体において、前量子化束の球面束に自然なリーマン計量を入れて得られた距離空間を考え、複素構造をケーラー偏極とみなした上で変形し、ラグランジュファイブレーションに対応する実偏極に収束するような状況での点付き測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束を考察した。その結果、基点をボーア・ゾンマーフェルトファイバー上に取った場合と、それ以外のファイバー上に取った場合とで、極限として現れる測度距離空間の構造が異なることを証明した。この成果は当初の研究計画では予期していなかったが、そのアイディアの根本は本研究課題の遂行過程から派生したものである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Kota Hattori	４．巻 53
２．論文標題 On the Taub-NUT type hyper-Kaehler metrics on the Hilbert schemes of n points on C^2	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Differential Geometry and its Applications	６．最初と最後の頁 76-96
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.difgeo.2017.04.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kota Hattori	４．巻 21, no. 5
２．論文標題 The nonuniqueness of the tangent cones at infinity of Ricci-flat manifolds	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Geometry & Topology	６．最初と最後の頁 2683-2723
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/gt.2017.21.2683	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kota Hattori	４．巻 17(2)
２．論文標題 New examples of compact special lagrangian submanifolds embedded in hyper-kaehler manifolds	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Journal of Symplectic Geometry	６．最初と最後の頁 301-335
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/JSG.2019.v17.n2.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計14件（うち招待講演　11件／うち国際学会　6件）

１．発表者名 服部広大
２．発表標題 On the moduli spaces of tangent cones at infinity of Ricci-flat manifolds
３．学会等名 The 2nd Symposium in Geometry and Differential Equations（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名
服部広大

２．発表標題
超ケーラー多様体に埋め込まれたコンパクト特殊ラグランジュ部分多様体

３．学会等名
大阪大学幾何学セミナー（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
服部広大

２．発表標題
幾何学的量子化と測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束

３．学会等名
Year-End workshop on geometry, topology and related topics in Kagoshima（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
服部広大

２．発表標題
ベクトル束上のラプラシアンの固有値の連続性について

３．学会等名
日本数学会年会

４．発表年
2019年

１．発表者名
服部広大

２．発表標題
リッチ平坦多様体の無限遠点における接錐の非一意性について

３．学会等名
日本数学会秋季総合分科会（招待講演）

４．発表年
2017年

１．発表者名
Kota Hattori

２．発表標題
The nonuniqueness of tangent cones at infinity of Ricci flat manifolds

３．学会等名
Boston-Keio Workshop 2017（国際学会）

４．発表年
2017年

１．発表者名
服部広大

２．発表標題
リッチ平坦多様体の無限遠点における接錐のモジュライ空間について

３．学会等名
2017年度福岡大学微分幾何研究集会（招待講演）

４．発表年
2017年

１．発表者名
Kota Hattori

２．発表標題
New examples of compact special Lagrangian submanifolds embedded in hyper-Kaehler manifolds

３．学会等名
Quaternionic Differential Geometry and its Related Topics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2016年

１．発表者名
服部広大

２．発表標題
リッチ平坦多様体の漸近錐について

３．学会等名
多様体上の微分方程式（招待講演）

４．発表年
2016年

１．発表者名 Kota Hattori
２．発表標題 The nonuniqueness of the tangent cone at infinity of Ricci-flat manifolds
３．学会等名 The First Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry & the 8th TIMS-OCAMI-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 Kota Hattori
２．発表標題 The nonuniqueness of the tangent cone at infinity of Ricci-flat manifolds
３．学会等名 18-th UK-Japan winter school in Mathematics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 服部広大
２．発表標題 ある完備リッチ平坦多様体の漸近錐のモジュライ空間について
３．学会等名 日本数学会2017年度年会
４．発表年 2017年

１．発表者名 服部広大
２．発表標題 幾何学的量子化と測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束について
３．学会等名 第66回幾何学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Kota Hattori
２．発表標題 Geometric Quantization and the measured Gromov-Hausdorff convergence
３．学会等名 The first geometry conference for friendship of Japan and Germany（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考