

令和 2 年 6 月 19 日現在

機関番号：32621

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17600

研究課題名(和文) カンドル代数を用いた結び目不変量の再定式化と一般化および応用

研究課題名(英文) Reformulation and generalization of knot invariants using quandles

研究代表者

大城 佳奈子 (Oshiro, Kanako)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：90609091

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：第一に、ねじれアレキサンダー不変量とカンドルコサイクルを統一する結び目不変量の族を導入し、研究を行った。この研究は筑波大学の石井敦氏の協力のもと行った。また、群表示からねじれアレキサンダー不変量を得る概念を一般化させ、カンドル表示から一般化されたねじれアレキサンダー不変量を得る方法を紹介した。

第二に、knot-theoretic ternary-quasigroup理論(図式の領域彩色に対応する代数系の理論)について、local biquandle理論を用いた解釈を与えた。また、シャドウバイカンドル理論との関係性についても明らかにした。以上のことを、国際学会や論文などで発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

カンドル代数を用いた様々な結び目不変量の再定式化を考えることで、不変量の計算の単純化および、一般化による強力な不変量の構成が期待できる。本研究では、ねじれアレキサンダー不変量やカンドルコサイクル不変量、knot-theoretic ternary-quasigroup理論のカンドル代数を用いた再定式化を与えた。特に、ねじれアレキサンダー不変量の再定式化の応用として、結び目の5-move同値性の判定方法を与えた。このように、既存結び目不変量の再定式化や一般化によって、研究の幅や手段が広がり、今後も新たな具体的計算例や応用例が発見されることが期待される。

研究成果の概要(英文)：First, we introduced and studied a new family of knot invariants that includes twisted Alexander invariants and quandle cocycle invariants. We also introduced a generalization of the notion of Fox calculus, which gives a knot invariant obtained from quandle presentations of knot quandles. This study was given with the cooperation of Atsushi Ishii in University of Tsukuba. Second, we gave an interpretation of knot-theoretic ternary-quasigroup theory (which is a theory corresponding to region colorings of knot diagrams) by using local biquandles. This implies that knot-theoretic ternary-quasigroup theory can be interpreted similarly as biquandle theory which is well-known. This study was given with the cooperations of Natsumi Oyamauchi in Shumei University and Sam Nelson in Claremont McKenna College. Furthermore, we gave a relationship between shadow biquandle theory and knot-theoretic ternary-quasigroup theory. The obtained results was announced in some conferences or in research papers.

研究分野：結び目理論

キーワード：カンドル シャドウバイカンドル local biquandle カンドル表示 カンドルコサイクル不変量 アレキサンダー不変量 ねじれアレキサンダー不変量

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

近年、結び目理論では様々な強力な不変量が導入され、結び目や絡み目の様々な性質が解明されてきている。しかし、完全または強力な結び目不変量は、一般にはとても複雑であり、計算することが困難である。捩れアレキサンダー多項式も強力な不変量の一つであるが、その複雑さから計算することは容易ではない。これら不変量の別解釈や計算の単純化が求められている。カンドルは結び目図式の基本変形であるライデマイスター変形を現した代数系であり、特に結び目カンドルは結び目そのものを表す代数系とも言える。カンドルを用いて結び目不変量を再定式化することは、不変量の計算の単純化および一般化に繋がることが期待されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、カンドル代数を用いた様々な結び目不変量の再定式化を考えることで、不変量の計算の単純化および、一般化による強力な不変量の構成を行うことである。それらを、結び目、曲面結び目、ハンドル体結び目の研究に応用させ、様々な性質について明らかにしたい。その応用の一つとして、曲面結び目の三重点数に関する新しい評価式構成を試みる。また、捩れ Alexander 不変量の一般化を与える「捩れカンドル理論」の発展は特に重要であると言える。捩れカンドルについて、一般化されたカンドルコホモロジー理論や不変量の構築および、応用例の構成等を考え、研究を進展させたい。また、Jones 多項式等その他結び目不変量のカンドル代数を用いた再定式化および応用例の構成も目指す。

3. 研究の方法

捩れアレキサンダー不変量のカンドルを用いた再定式化の研究をもとに、様々な既存結び目不変量のカンドルを用いた再定式を行う。一般化による強力な不変量の構成および応用例の発見を目指す。

4. 研究成果

捩れアレキサンダー不変量とカンドルコサイクルを統一する結び目不変量の族を導入し、研究を行った。また、群表示から捩れアレキサンダー不変量を得る概念を一般化させ、カンドル表示から一般化された捩れアレキサンダー不変量を得る方法を紹介した。応用例として、5-move 同値性の判定方法を与えた。

また、捩れアレキサンダー行列の行における線形関係式を与える row relation map というものを定義し、row relation map と twisted 2-cocycle がシャドウカンドル 2-cocycle を与えることを証明した。これは、結び目不変量である generalized quandle cocycle invariant がシャドウカンドルコサイクル不変量の一つであることを示している。この研究は筑波大学の石井敦氏の協力のもと行った。

knot-theoretic ternary-quasigroup 理論 (図式の領域彩色に対応する代数系の理論) について、local biquandle 理論を用いた解釈を与えた。このことによって、knot-theoretic ternary-quasigroup の理論を、よく知られている biquandle 理論のように解釈することができるようになった。この研究は Claremont McKenna College の Sam Nelson 氏、秀明大学の大山口菜都美氏の協力のもと行った。また、knot-theoretic ternary-quasigroup 理論とシャドウバイカンドル理論との関係性についても研究を行い、ある条件の下では、シャドウバイカンドル理論と knot-theoretic ternary-quasigroup 理論は同じものであるということを証明した。

Claremont McKenna College の Sam Nelson 氏と群馬工業高等専門学校の水野理佳氏、矢口義朗氏との協力の元、biquandle virtual bracket を用いた (仮想) 絡み目の不変量を構成した。また、その不変量は可逆性や非もろ手型の判定に有効であることを証明した。

群馬工業高等専門学校の水野理佳氏、矢口義朗氏との協力の元、up-down coloring と仮想結び目のライデマイスター変形 II の必要性についての研究を行った。我々の研究によって、代数系の彩色を用いたライデマイスター変形 II の必要性についての研究が初めて与えられた。「任意の仮想結び目図式 D に対し、 D と同値なある仮想結び目図式 D' が存在し、 D と D' の間には必ずライデマイスター変形 II が必要である」という性質を証明した。

領域彩色である Dehn coloring を空間グラフに定義するための頂点条件を全て決定した。また、頂点条件の分類に必要な写像が vertex-weight invariant をいう空間グラフ不変量を与えることを示した。空間グラフの（頂点条件なしの）Dehn coloring の数や空間グラフが含む結び目の種類では区別出来ない例で、vertex-weight invariant によって区別されるものの計算例を紹介した。この研究は秀明大学の大山口菜都美氏の協力のもと行った。

ハンドル体絡み目に対する、universal なバイカンドル彩色を与える multiple conjugation biquandle のホモロジー理論を構成し、ハンドル体絡み目におけるコサイクル不変量を定義した。具体的なコサイクルの構成、具体的なハンドル体絡み目不変量の計算も行った。この研究は、石井敦氏（筑波大学）、岩切雅英氏（佐賀大学）、鎌田聖一氏（大阪市立大学）、Jieon Kim 氏（釜山大学）、松崎尚作氏（拓殖大学）の協力の元行った。

得られた成果を国内研究集会や国際会議などで発表し、論文としてまとめた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Kanao Oshiro	4. 巻 271
2. 論文標題 Shadow biquandles and local biquandles	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology Appl.	6. 最初と最後の頁 107041
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Atsushi Ishii, Masahide Iwakiri, Seiichi Kamada, Jieon Kim, Shosaku Matsuzaki, Kanao Oshiro	4. 巻 48
2. 論文標題 A multiple conjugation biquandle and handlebody-links	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hiroshima Math. J.	6. 最初と最後の頁 89--117
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Atsushi Ishii, Masahide Iwakiri, Seiichi Kamada, Jieon Kim, Shosaku Matsuzaki, Kanao Oshiro	4. 巻 27
2. 論文標題 Biquandle (co)homology and handlebody-links	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1843011, 33 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Sam Nelson, Kanao Oshiro, Natsumi Oyamaguchi	4. 巻 258
2. 論文標題 Local biquandles and Niebrzydowski's tribracket theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology Appl.	6. 最初と最後の頁 474--512
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sam Nelson, Kanako Oshiro, Ayaka Shimizu, Yoshiro Yaguchi,	4. 巻 28
2. 論文標題 Biquandle Virtual Brackets	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1940003, 22 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kanakano Oshiro, Ayaka Shimizu, Yoshiro Yaguchi	4. 巻 26
2. 論文標題 Up-down colorings of virtual-link diagrams and the necessity of Reidemeister moves of type II	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1750073
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Atsushi Ishii, Masahide Iwakiri, Seiichi Kamada, Jieon Kim, Shosaku Matsuzaki, Kanako Oshiro	4. 巻 48
2. 論文標題 A multiple conjugation biquandle and handlebody-links	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hiroshima math. J.	6. 最初と最後の頁 89--117.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Atsushi Ishii, Ryo Nikkuni, Kanako Oshiro	4. 巻 55
2. 論文標題 On calculations of the twisted Alexander ideals for spatial graphs, handlebody-knots and surface-links	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 297--313
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計14件(うち招待講演 11件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Kanako Oshiro
2. 発表標題 Link invariants obtained from augmented Alexander matrices
3. 学会等名 Meeting #1137: AMS Spring Western Sectional Meeting, Portland State University, Oregon(米国) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大城佳奈子
2. 発表標題 Augmented Alexander matrices and link invariants
3. 学会等名 上智大学数学談話会, 上智大学(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大城佳奈子
2. 発表標題 Augmented Alexander matrices and generalizations of twisted Alexander invariants and quandle cocycle invariants I
3. 学会等名 農工大セミナー, 東京農工大学(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大城佳奈子
2. 発表標題 Local biquandles and region colorings of link diagrams
3. 学会等名 Quandles and Symmetric Spaces, 大阪市立大学(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大城佳奈子
2. 発表標題 Shadow biquandles and local biquandles
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会, 東京工業大学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanao Oshiro
2. 発表標題 Calculations of twisted Alexander invariants using \mathbb{Z} -derivatives for quandles
3. 学会等名 Meeting #1147: Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, Hawaii(米国)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kanao Oshiro
2. 発表標題 Augmented Alexander matrices and generalizations of twisted Alexander invariants and quandle cocycle invariants
3. 学会等名 Meeting #1128: AMS Spring Western Sectional Meeting, Washington State University, Pullman (米国)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kanao Oshiro
2. 発表標題 Augmented Alexander matrices and generalizations of twisted Alexander invariants and quandle cocycle invariants
3. 学会等名 2017 KIAS Research Station Busan Self-distributive system and quandle (co)homology theory in algebra and low-dimensional topology, Kolon SeacLOUD Hotel (韓国)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大城佳奈子
2. 発表標題 Introduction to biquandle theory
3. 学会等名 研究集会「ハンドル体結び目とその周辺10・Hurwitz action 7」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大城佳奈子
2. 発表標題 Biquandle (co)homology and handlebody-links
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory, 大阪市立大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kanao Oshiro
2. 発表標題 G-families of quandles, their homology theory and cocycle invariants of handlebody-knots
3. 学会等名 Meeting #1135: Joint Mathematics Meetings, San Diego Convention Center, California(米国) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大城佳奈子
2. 発表標題 Symmetric quandle cocycle invariants for oriented links
3. 学会等名 上智大学数学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kanao Oshiro
2. 発表標題 Up-down colorings of virtual-link diagrams and RII-detectors
3. 学会等名 Claremont Topology Seminar (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 大城佳奈子
2. 発表標題 Up-down colorings of virtual-link diagrams and the necessity of Reidemeister moves of type II
3. 学会等名 茨城工業高等専門学校数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kanako Oshiro's Homepage http://pweb.sophia.ac.jp/oshirok/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考