

令和 3 年 6 月 23 日現在

機関番号：57103

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17603

研究課題名（和文）非コンパクト対称空間内の種々の等質部分多様体の研究

研究課題名（英文）Studies on some homogeneous submanifolds in symmetric spaces of noncompact type

研究代表者

橋永 貴弘 (Hashinaga, Takahiro)

北九州工業高等専門学校・生産デザイン工学科・准教授

研究者番号：40772132

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では非コンパクト対称空間内の種々の等質部分多様体の構成、分類問題に関する研究を行った。主な成果として、非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の構成、分類問題に関して進展が得られた。特に等質ラグランジュ部分多様体を許容するような岩澤分解の可解部分の部分群作用の分類については、複素双曲空間の場合に完全な分類を与えることができた。また階数の高い非コンパクト型エルミート対称空間についても、豊富に等質ラグランジュ部分多様体の例を構成するとともに、分類問題に関して進展を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非コンパクト型エルミート対称空間への等質ラグランジュ部分多様体を許容する岩澤分解の可解部分の部分群作用の分類問題は、ある性質を満たす可解リー代数の分類問題に帰着される。しかしながら話をリー代数レベルに帰着させても、一般に対称空間の階数が高い場合にはその分類は難しい。本研究では、そのような問題に対して、ある性質を満たすグラフの分類問題に帰着させることで進展を得ることができた。可解リー代数とグラフの間に対応を与え、分類問題を解決するという試みは新しく、その意味で本研究の成果は学術的に意義があると思われる。

研究成果の概要（英文）：In this research, we have studied some homogeneous submanifolds in symmetric spaces. In particular, we had progresses on classification problems of homogeneous Lagrangian submanifolds in Hermitian symmetric spaces of noncompact type. For group actions in the solvable part of the lawasawa decomposition admitting a Lagrangian orbit, we gave complete classification of such group actions when the ambient space is the complex hyperbolic space. Moreover, in higher rank cases, we constructed many examples and gave a partial classification result of homogeneous Lagrangian submanifolds.

研究分野：微分幾何学

キーワード：対称空間 等質部分多様体 ラグランジュ部分多様体 リー群 リー代数

1. 研究開始当初の背景

リーマン多様体内の等質部分多様体は、様々な性質を持つ部分多様体の例を豊富に供給するクラスとして知られており、分類問題は部分多様体論において基本的かつ重要な問題として盛んに研究されてきた。例えば等質超曲面(余等質1作用)に関しては、1930年代後半のLevi-Civita, Serge によるユークリッド空間内の等質超曲面の分類をはじめとして、球面(Hsiang-Lowson, J. Differential Geom. 1971), 複素射影空間(Takagi, Osaka Math. J., 1973) などの場合の分類が古くから知られている。また2000年以降にも一般のコンパクト型対称空間内の等質超曲面が A. Kollros によって分類され、さらに J. Berndt-H. Tamaru による一連の研究により非コンパクト型対称空間への余等質性1作用の研究に関しても大きな進展があった。しかしながら余等質性の高い群作用の分類は難しく、その様相すらつかめていない状況にあった。

後述の通り本研究では非コンパクト対称空間内の等質部分多様体の研究と密接に関係している2つの研究テーマ、「非コンパクト対称空間内の等質部分多様体論を用いたリー群上の左不変な幾何構造の研究」および「非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の研究」を通して、余等質性の高い群作用の様相を調べることを目的として含んでいる。ここではこれら2つの研究の背景についても簡潔に述べておく。

(1) 「等質部分多様体論を用いたリー群上の左不変な幾何構造の研究」について

リー群上の左不変な幾何構造のなす空間は非コンパクト対称空間となり、さらに適当な同値関係による同値類はその中の等質部分多様体として与えられることが知られている。例えば n 次元リー群 G に対して、 G 上の左不変計量のなす空間は非コンパクト対称空間 $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ と同一視できる。また G 上の左不変計量に対して「スカラー倍を除いて等長的」という同値関係を考えると、その同値類は $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ 内の等質部分多様体となる。報告者は田丸博士氏との共同研究において3次元可解リー群上の左不変計量の性質とその同値類(以下対応する部分多様体と呼ぶ)の部分多様体としての性質についての関係性を調べ、次の結果を得ていた:

定理(H. Tamaru) 3次元可解リー群上の左不変計量に対して、左不変計量が Ricci soliton であるための必要十分条件は対応する部分多様体が $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ 内で極小であること。

しかしながら上記の結果は一般の可解リー群の場合には成り立たないことが報告者により確認されていた。

(2) 「非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の研究」について

ラグランジュ部分多様体はシンプレクティック幾何学において重要な役割を演じる部分多様体として知られている。いくつかのエルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体はシンプレクティック幾何学においても興味深い具体例を供給しており、その構成・分類に関する研究が行われていた。分類問題に関しては、Beduli-Gori により複素射影空間内の等質ラグランジュ部分多様体で特に単純リー群の作用から得られるものの分類が与えられている。また Ma-Ohnita により複素二次超曲面内の等質ラグランジュ部分多様体の完全な分類が与えられている。他方、非コンパクト型エルミート対称空間は複素ユークリッド空間とシンプレクティック微分同相であることから、非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体は複素ユークリッド空間内の(コンパクトとは限らない)ラグランジュ部分多様体の例を豊富に供給することが期待される。報告者は梶ヶ谷徹氏との共同研究により複素双曲空間内の等質ラグランジュ部分多様体の構成、分類問題に取り組んでいた。

2. 研究の目的

本研究の目的の1つは非コンパクト対称空間内の等質部分多様体に関する研究の進展、特に余等質性の高い群作用の研究を進展させることである。しかしながら上述の通り、余等質性の高い群作用の分類は難しく、その様相すらわかっていない。そこで本研究では非コンパクト対称空間内の(余等質性の高い)等質部分多様体の研究と密接に関係している下記の2つの研究に着目し、各々の研究を進展させるとともに、それらを通して非コンパクト対称空間内の等質部分多様体の例を豊富に構成することで、余等質性の高い群作用の様相を探ることとした:

- (1) 非コンパクト対称空間内の等質部分多様体論を用いたリー群上の左不変な幾何構造の研究
- (2) 非コンパクト型対称空間内の等質部分多様体に対して、良い性質をもつものの研究(構成, 分類)

3. 研究の方法

上記2つの研究テーマに関して、(1)については低次元リー群上の左不変計量に対応する等質部分多様体の幾何学的性質を中心に研究を行った。また(2)については非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の構成、分類問題に関する研究を主として行った。

いずれの研究も可解リー群が重要な役割を果たしている。非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の分類問題に関しては、非コンパクト型対称空間への余等質性 1 作用や、polar 作用の研究手法を参考に研究を行った。まずは作用する群として等長変換群の岩澤分解の可解部分の部分群作用や、あるいはより大きなクラスである放物型部分群の部分群作用を考えることで構成、分類問題の進展を目指した。

4. 研究成果

等質部分多様体論を用いたリー群上の左不変な幾何構造の研究に関しては、低次元リー群の場合を中心に左不変計量に対応する部分多様体の幾何学的性質を考察することで、余等質性の高い等質部分多様体の例を得ることができた。しかしながら左不変計量の研究(特に良い性質をもつ左不変計量の判定法の確立等)に対して、対応する部分多様体の観点からの有効な研究枠組みの構築には至らずその意味で大きな進展は得られなかった。

一方、非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の研究に関しては、豊富に例を構成するとともに部分的な分類結果を得ることができた。非コンパクト型対称空間への等長的作用の種々の分類問題において、その岩澤分解の可解部分は重要な役割を果たしてきたことを踏まえ、本研究においてもまずは岩澤分解の可解部分の部分群作用で等質ラグランジュ部分多様体を許容するものについて研究を行い、以下の成果を得た。

(1) 梶ヶ谷徹氏との共同研究において、複素双曲空間の場合に等質ラグランジュ部分多様体を許容する岩澤分解の可解部分の部分群作用の完全な分類を与えた。我々の結果から上記の群作用は大きく分けると 2 種類存在することが分かった。一つは等質ラグランジュ部分多様体の 1 変数族を与え、もう一つは全ての点を通る軌道が等質ラグランジュ部分多様体となる。得られた等質ラグランジュ部分多様体の幾何学的性質についても調べている。

(2) 複素双曲空間の結果を踏まえ、階数の高い非コンパクト型対称空間への等質ラグランジュ部分多様体を許容する岩澤分解の可解部分の部分群作用の部分的な構成方法を与えた。この構成法により階数 n の非コンパクト型エルミート対称空間に対して、等質ラグランジュ部分多様体の k 変数族をもつ岩澤分解の可解部分の部分群作用が存在することが期待される(ここで k は n 以下の任意の自然数とする)。

(3) 栗原大武氏との共同研究において、階数 n の非コンパクト型エルミート対称空間 $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$ の場合に、(2)の構成法から得られる等質ラグランジュ部分多様体が、ある性質をもつグラフ(根付き木)と対応することを示し、そのような根付き木の分類を与えた。等質ラグランジュ部分多様体を許容する岩澤分解の可解部分の部分群作用の分類問題は然るべき性質をもつ可解リー代数の分類問題に帰着される。しかしながら話をリー代数レベルに帰着させても一般に階数の高い非コンパクト型エルミート対称空間の場合にはその分類は難しい。分類が困難な可解リー代数の分類問題を、分類可能なグラフの問題に帰着させ解決することができたのは本研究において大きな進展であると言える。しかしながら同様の方法を他の非コンパクト型エルミート対称空間へ拡張した場合、対応するグラフはより複雑となりグラフの分類は困難であった。そのため、他の場合への拡張については今後更なる工夫が必要である。

また岩澤分解の可解部分を含むより大きなクラスである放物型部分群の部分群作用から得られる等質ラグランジュ部分多様体についても研究を行った。

(4) J. C. Diaz-Ramos 氏, M. D. Vazquez 氏との共同研究により、複素空間形への群作用で、すべての軌道が等質ラグランジュ部分多様体となるものの完全な分類を与えた。分類の際に生じた問題の多くは複素双曲空間への polar 作用の研究において用いられたアイデアで解決することができたが、その様相は polar 作用の分類の場合と比べて複雑であった。

その他、本研究に関連する成果として梶ヶ谷徹氏との共同研究により非コンパクト型エルミート対称空間の同変実現に関する以下の結果を得た。

(5) 非コンパクト型エルミート対称空間は複素多様体としては、複素ユークリッド空間内の有界領域として実現される。またシンプレクティック多様体としては標準的なシンプレクティックベクトル空間とシンプレクティック微分同相であることが知られている。これらの実現は複素幾何あるいはシンプレクティック幾何の手法を用いて与えられていたが、我々はこれらの実現がもつ同変性に着目し、対称空間の極性を用いることで統一的な手法による構成方法を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takahiro Hashinaga	4. 巻 -
2. 論文標題 Construction of noncompact Lagrangian orbits in some Hermitian symmetric spaces of noncompact type	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Recent Topics in Differential Geometry and its Related Fields, World Scientific	6. 最初と最後の頁 29--44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/9789811206696_0003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshio Agaoka, Takahiro Hashinaga	4. 巻 205
2. 論文標題 On local isometric embeddings of three-dimensional Lie groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Geom. Dedicata	6. 最初と最後の頁 191--219
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-019-00472-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru	4. 巻 28
2. 論文標題 Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Internat. J. Math.	6. 最初と最後の頁 31pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X17500483	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jong Taek Cho, Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru	4. 巻 203
2. 論文標題 The solvable models of noncompact real two-plane Grassmannians and some applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Hermitian-Grassmannian Submanifolds, Springer Proc. Math. Stat.	6. 最初と最後の頁 311--321
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-981-10-5556-0_26	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jong Taek Cho, Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru	4. 巻 123
2. 論文標題 Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Geom. Phys.	6. 最初と最後の頁 211-234
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2017.08.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, Kazuhiro Terada	4. 巻 68
2. 論文標題 Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 669-684
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/06820669	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Hiroshi Tamaru	4. 巻 68
2. 論文標題 Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J.	6. 最初と最後の頁 559-568
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj/1486177215	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Hashinaga, Toru Kajigaya	4. 巻 51
2. 論文標題 A class of non-compact homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Ann. Global Anal. Geom.	6. 最初と最後の頁 21-33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10455-016-9521-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 橋永貴弘, 梶ヶ谷徹(講演者)
2. 発表標題 非コンパクト型エルミート対称空間の同変実現
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 3次元リーマン多様体の余次元1局所等長埋め込み
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 根付き木を用いたラグランジュ部分代数の構成
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会2019（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 根付き木を用いた等質ラグランジュ部分多様体の構成
3. 学会等名 Submanifold theory in a wider sense (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿賀岡芳夫(講演者), 橋永貴弘
2. 発表標題 3次元warped product計量の局所等長埋め込み
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 Realizations of contact metric (α , μ) -spaces as homogeneous real hypersurfaces in noncompact real two-plane Grassmannians
3. 学会等名 Symmetry and Shape -Celebrating the 60th birthday of Prof. J. Berndt (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 Noncompact homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 Hiroshima Differential Geometry Day 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 記号的方法と局所等長埋め込み問題への応用
3. 学会等名 北九州ワークショップ2018「不変式論と微分幾何学への応用」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 Homogeneous Lagrangian submanifolds in Hermitian symmetric spaces of noncompact type
3. 学会等名 ICDG 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 非コンパクト型エルミート対称空間内の等質部分多様体
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 岩澤分解の冪零部分とその部分リー代数
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 根付き木を用いたラグランジュ部分代数の構成
3. 学会等名 北九州ワークショップ「幾何学と組合せ論2019」 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋永 貴弘
2. 発表標題 3次元リーマン多様体の局所等長埋め込み
3. 学会等名 信州大学数理科学談話会, 数理経済談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 橋永 貴弘
2. 発表標題 3次元リーマン多様体の局所等長埋め込み
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2018 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jong Taek Cho, 橋永 貴弘, 久保 亮(講演者), 武富 雄一郎, 田丸 博士
2. 発表標題 Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 橋永 貴弘
2. 発表標題 複素双曲空間内の等質ラグランジュ部分多様体
3. 学会等名 合宿セミナー2016 in 山口 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 On homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 Differential Geometry, Lie Theory and Low-Dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 阿賀岡 芳夫(講演者), 橋永 貴弘
2. 発表標題 3次元リーマン多様体が4次元ユークリッド空間へ局所等長埋め込み可能となるための必要十分条件
3. 学会等名 日本数学会2017年度年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 On homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 The 13th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スペイン	Universidade de Santiago de Compostela			