

令和 3 年 6 月 22 日現在

機関番号：57103

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17604

研究課題名(和文) 表現論を用いた大対蹠集合の堅いデザインによる特徴付けの研究

研究課題名(英文) Research on characterizations of great antipodal sets as tight designs using representation theory

研究代表者

栗原 大武 (Kurihara, Hirotake)

北九州工業高等専門学校・生産デザイン工学科・准教授

研究者番号：60637099

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：対称空間上には大対蹠集合と呼ばれる良い有限部分集合がある。本研究では、対称R空間の大対蹠集合が組合せ論の視点から見てどのような性質をもつか調べた。組合せ論では全体空間を良く近似する概念としてtデザインと呼ばれる性質を扱う。大対蹠集合がどのようなtに対してのデザインになるかは一般的にわかっていないが、この研究で特別な既約表現から得られるtに対して、大対蹠集合がtデザインになるということが得られた。また一方で大対蹠集合には自然なグラフ構造が入るが、そのグラフも距離可移グラフであることも示せた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対称空間の大対蹠集合を組合せ論の立場から研究することは我々の独自の視点であり、そのような研究を創出することは学術的な意義をもつと考える。大対蹠集合の組合せ論的情報から全体の空間の情報を引き出せることがわかったのは大変興味深く、対称空間の研究を組合せ論の言葉で翻訳できることは、今後の数学の発展にも寄与するものと考えられる。

研究成果の概要(英文)：Great antipodal sets on symmetric spaces are "good" finite subset of the spaces. In this research, we studied properties of Great antipodal sets on symmetric R-spaces in terms of combinatorics. In the area of combinatorics, we treat t-designs, which can approximate whole spaces.

In general, for a given a great antipodal set, it is not easy to determine t such that the set is a t-design. In this research, we obtained the relations between special irreducible representations and t such that the great antipodal set is a t-design. Moreover, we also obtained the fact that great antipodal sets have the structures of distance-transitive graphs.

研究分野：幾何学と組合せ論

キーワード：大対蹠集合 対称R空間 デザイン

1 . 研究開始当初の背景

申請者はこれまで様々な空間上の“きれいな”有限個の点配置に興味をもち研究を行ってきた。この点配置の“きれいさ”を定式化する方法は様々な立場がある。

まずは幾何学的な立場からの“きれいな”配置について説明する。コンパクト対称空間は「点対称」をもつ空間として定義されるが、点対称と相性の良い有限部分集合は対蹠集合と呼ばれている。対蹠集合の中でも最も点の個数が多いものを大対蹠集合と呼ぶ。大対蹠集合は多くの点対称で不変になる対称性の高い有限集合であるといえる。この大対蹠集合のサイズは対称空間の不変量であり、対称空間のトポロジーなどの性質を反映することが知られている。また M が対称 R 空間と呼ばれる特別な対称空間であれば、 M の大対蹠集合の構造は合同変換を除いて一意に定まることが知られている。

一方で組合せ論的立場からの点配置の“きれいさ”を測る数学的な指標のひとつとしてデザインの概念がある。球面 t デザインは、大雑把にはどんな t 次以下の調和多項式のモーメントに関しても原点を重心にもつような、球面をよく“近似している”有限集合である。 t デザインは球面を近似する有限集合なので、ある程度のサイズが必要である。実際、 t デザインのサイズは Fisher 型の不等式という不等式で下から評価できることが知られている。少ない点で球面全体を近似するというはかなり条件の強いことなので、Fisher 型の不等式の下限に近いサイズのデザインは良いものだと言える。現在知られている下限に近いサイズのデザインの多くは、有限群論や Lie 環論などと関係するような非常に興味深いものになっている。またデザイン理論は球面上だけでなく、有限体上ベクトル空間や階数 1 の対称空間の上など多くの空間で拡張され、各空間における Fisher 型の不等式の下限に近いサイズをもったデザインは、球面の場合同様、様々な分野に登場し、関係することが少しずつ明らかになってきた。

以降最もサイズの小さいデザインを堅いデザインと呼ぶことにする。球面上において堅い 1 デザインは 2 点からなり、極対的な集合に限ることが知られている。また球面上においての大対蹠集合は極対的な 2 点である。従って球面上の 2 点集合が「大対蹠集合であること」と「堅い 1 デザインであること」は同値である。またこの事実は球面を含む階数 1 の対称空間上に拡張でき、階数 1 の対称空間上の有限集合が「大対蹠集合であること」と「堅い 1 デザインであること」は同値であることが知られている (Hoggar (European J. Combin., 1982))。

上記のことから対称 R 空間の大対蹠集合と堅いデザインの間の関係を調べることは自然な流れであり、これが当時の当初の研究の背景である。

2 . 研究の目的

コンパクト対称空間 $M = G/K$ 上のデザインは G の既約表現を用いて定義される。 G/K 上の有限集合 X が G の既約表現に対応したデザインになっているとき、 X は X と相性が良いと呼ぶことにする。複素グラスマン空間 $G_r(C^{n+r}) = U(n+r)/U(r) \times U(n)$ の場合に大対蹠集合と相性の良い既約表現の研究を奥田隆幸氏 (広島大学) と行っていたので、まずはその続きを行うことにした。先行研究として、 $G_r(C^{n+r})$ の大対蹠集合と相性のよい $U(n+r)$ の既約表現をある程度特定した。さらにそれらの既約表現達に関する堅いデザインになることが大対蹠集合になることの同値条件であることも示していた。

上記の先行研究では $G_r(C^{n+r})$ の大対蹠集合と相性の良い既約表現を全て求めるには至っていなかった。この先行研究を進展させるべく次の 3 つの目標を掲げた。

(A) 複素グラスマン空間 $G_r(C^{n+r})$ の大対蹠集合と相性の良い既約表現を全て求める

(B) 全ての既約コンパクトエルミート対称空間について大対蹠集合と堅いデザインの同値性の判定を行う

(C) 対称 R 空間の大対蹠集合についても相性の良い既約表現を全て決定し、これからエルミート対称空間と対称 R 空間の違いを見出す

目標は (A), (B), (C) の順に抽象的になり困難になるが、これらがすべて解決できれば、組合せ論の視点から対称空間論に新たな知見を与えることが想定される。

3 . 研究の方法

「研究の目的」で示した 3 つの目標について、「組合せ論と表現論」と「幾何学と表現論」からの両方の立場から大対蹠集合の性質を調べていく。

組合せ論と表現論的立場からは、主に大対蹠集合に付随する表現論的性質や組合せ構造について研究する。既約表現が大対蹠集合と相性が良いかどうかを調べるためにはその既約表現の帯球関数を具体的に表示する必要がある。 $G_r(C^{n+r})$ に関する既約表現の帯球関数の具体的な表示

は James-Constantine (Proc.Lond. Math. Soc., 1974) により与えられているが, 実際にそれを使って計算することは易しくはない. さらに一般の対称 R 空間の場合は帯球関数を具体的に表示することも難しい. (A) については Mathematica 等の数式処理ソフトを活用してパラメータ n, r が小さい場合から具体的に計算して, 相性のよい既約表現の候補を見つけていく. そしてその候補を元に相性のよい既約表現を完全に決定する. (B) については表現論の知識を深めたり, リー群の表現論や調和解析を専門とする研究者と協力をして帯球関数が計算に使えるように具体的に書き下し, (A) と同様の方針で研究を進める.

幾何学と表現論的立場からは, 主に大対蹠集合の背後にある対称空間の理論について深く研究を行う. エルミート対称空間の大対蹠集合の一意性は, 対称空間をコンパクト Lie 環の随伴軌道として埋め込み, その埋め込みと極大可換部分 Lie 環の交叉の様子をみて得られることが Tanaka-Tasaki (J. Math. Soc. Japan, 2012) によって示された. (B), (C) の問題は Lie 環の随伴軌道の幾何学や表現論の知識も必要になってくるため, その専門家と協力して研究を進める.

4. 研究成果

本研究の主な研究成果として, 1 本の査読付き学术论文の執筆, 5 本の査読無し研究集会報告集, 及び 28 件の学術講演を行った.

(a) 1 本の査読付き学术论文「Great antipodal sets on complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities」では先行研究で得られていた $G_r(C^{n+r})$ の大対蹠集合と相性のよい既約表現の研究を進展させて, 相性のよい既約表現の集合が少ない場合は, その堅いデザインの構造は自由度をもち, 大対蹠集合を特徴づけられないことを示した. つまり, 大対蹠集合を特徴づけられる“過不足ない”既約表現を決定した内容となっている.

(b) RIMS 研究集会 有限群・代数的組合せ論・頂点作用素代数の研究集会報告「Hermite 対称空間の大対蹠集合におけるアソシエーションスキーム構造」は以下の内容の報告である. エルミート対称空間の大対蹠集合のデザインの構造を調べる際に, 大対蹠集合の幾何的性質から調べたらよいことに気づいた. そこでエルミート対称空間のリーマン幾何構造を大対蹠集合に反映させ最小距離からできるグラフ構造について調べることにした. するとそのグラフ構造は“アソシエーションスキーム”という代数的組合せ論ではよく扱われている非常に性質のよい構造が付随していることが分かった. この結果は目的(B)に対して直接的ではないが, 解決の糸口になっている. 今後もこの研究を進めて, (B)の全容解明を目指したい.

(c) 第 35 回 代数的組合せ論シンポジウム報告「ユニタリ群上の大対蹠集合と Hamming cube」は以下の内容の報告である. 対称 R 空間の例としてユニタリ群 $U(n)$ は基本的であり重要である. この報告では, $U(n)$ の大対蹠集合と相性のよい $U(n)$ の既約表現の必要十分条件を解明して, n が小さいところでそのような既約表現をすべて決定した. また $U(n)$ の大対蹠集合に付随するアソシエーションスキーム構造についても研究を行った. これは(C)の解明の足掛けになる結果であった. 今後もこの一具体例から一般の対称 R 空間の場合に対しても同様のアプローチで進展を得ていきたい.

(d) RIMS 共同研究(公開型) 代数的組合せ論と関連する群と代数の研究「対称 R 空間の不変量と大対蹠集合に付随する距離可移グラフの不変量の関係」は以下の内容の報告である. (b) で得られた結果を対称 R 空間の場合に拡張することに成功した. さらにそのアソシエーションスキーム構造は“距離可移グラフ”というアソシエーションスキームの中でもさらにより構造になっていることを示した. 距離可移グラフには直径や次数や交叉定数など, 様々な不変量があるが, そのグラフ不変量が, もとの対称 R 空間の位相的不変量と対応している場合があることが分かり, 今後も研究の題材になるものも見つかった.

本研究の総括としては, 研究目的のそれぞれの目標に対して, ほぼ満足いく形で達成できたと考えている. もちろんすべて解決できたとは言えないが, その研究を進めていく上で別の興味深い研究対象も出てきて今後もこれに関連した研究を継続していきたい.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kurihara Hirotake, Okuda Takayuki	4. 巻 559
2. 論文標題 Great antipodal sets on complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 432 ~ 466
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2020.05.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計28件（うち招待講演 17件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 栗原大武
2. 発表標題 デザイン理論の立場からのユニタリ群上の大対蹠集合について
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2020 スペクトラルグラフ理論および周辺領域第9回研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 栗原大武
2. 発表標題 根付き木を用いた等質ラグランジュ部分多様体の構成
3. 学会等名 広島幾何学研究集会 2020 オンライン（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 栗原大武
2. 発表標題 グラフ・デザイン理論の立場からのユニタリ群上の大対蹠集合について
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー（オンライン）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 栗原大武
2. 発表標題 対称 R 空間の不変量と大対蹠集合に付随する距離可移グラフの不変量の関係
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 代数的組合せ論と関連する群と代数の研究
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栗原大武
2. 発表標題 対称R空間と距離正則グラフ
3. 学会等名 首都大学東京・幾何セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栗原大武
2. 発表標題 非コンパクトエルミート対称空間に関する等質ラグランジュ部分代数の根付き木を用いた構成
3. 学会等名 組合せ論サマースクール2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栗原大武
2. 発表標題 根付き木を用いたラグランジュ部分代数の構成
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA-2019) 離散数学とその応用研究集会2019 (DMIA2019) スペクトラルグラフ理論および周辺領域第8回研究集会 (SGT8)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栗原大武
2. 発表標題 Great antipodal sets on unitary groups and Hamming graphs
3. 学会等名 The 2019 Workshop on Combinatorics and Quantum Information Theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 Lagrangian subalgebras and rooted tree graphs
3. 学会等名 Hakata Workshop; Winter Meeting 2019 ---Discrete Mathematics and its Applications---
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 Great antipodal sets on unitary groups in terms of design theory
3. 学会等名 研究集会「カンドルと対称空間」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 POVM from the viewpoints of combinatorics
3. 学会等名 研究集会『量子情報社会に向けた数理的アプローチ』(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 栗原 大武, 橋永 貴弘
2. 発表標題 数理科学研究分野における最先端研究を触発契機とする課外活動との連携例
3. 学会等名 日本高専学会第24回年会講演会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 ユニタリ群上の大対蹠集合とHamming cube
3. 学会等名 第35回 代数的組合せ論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 Great antipodal sets on unitary groups and Hamming graphs
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA 2018) in Sendai
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 調和解析的視点からのデザイン理論
3. 学会等名 第14回組合せ論若手研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 距離正則グラフのユークリッド歪みについて
3. 学会等名 2017年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 栗原 大武, 奥田 隆幸
2. 発表標題 On graph structures on great antipodal sets of Hermitian symmetric spaces
3. 学会等名 International Workshop on Bannai-Ito Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 複素グラスマン多様体とジョンソングラフの調和解析
3. 学会等名 名古屋組合せ論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 ユニタリ群上の大対蹠集合とHamming cube
3. 学会等名 組合せ論サマースクール2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 On graph structures on great antipodal sets of Hermitian symmetric spaces
3. 学会等名 Ninth Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 Euclidean distortions of distance regular graphs
3. 学会等名 The 82th KPPY Combinatorics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 既約コンパクトエルミート対称空間の大対蹠集合に付随するグラフ構造
3. 学会等名 北九州ワークショップ「幾何学と組合せ論」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 栗原 大武, 奥田 隆幸
2. 発表標題 Hermite 対称空間の大対蹠集合におけるアソシエーションスキーム構造
3. 学会等名 RIMS 研究集会 有限群・代数的組合せ論・頂点作用素代数の研究 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 Euclidean distortions of distance regular graphs
3. 学会等名 International Workshop on Algebraic Combinatorics at Anhui University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 距離正則グラフの Euclid 歪みについて
3. 学会等名 広島大学 トポロジー・幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 複素グラスマン空間上のDelsarte理論と大対蹠集合
3. 学会等名 山形大学代数的組合せ論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 複素グラスマン空間上の Delsarte 理論と大対蹠集合
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会 2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 栗原 大武
2. 発表標題 直径 3 の距離正則グラフのユークリッド歪みについて
3. 学会等名 第33回代数的組合せ論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------