

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17608

研究課題名(和文)無限次元構造の作用素(環)論的研究と記述集合論への応用

研究課題名(英文)Operator algebraic approach to infinite-dimensional objects and descriptive set theory

研究代表者

安藤 浩志(Ando, Hiroshi)

千葉大学・大学院理学研究院・特任助教

研究者番号：40767266

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 非有界自己共役作用素に対してWeyl-von Neumann型の定理が成り立つためのRの閉集合の満たすべき完全条件を決定。(2) 有限型Polish群に関するPopaの問題の反例を構成  
(3) III<sub>1</sub>型因子環の包含に対するrelative bicentralizer環の上にbicentralizer flowと呼ばれる1パラメータ自己同型群を構成し、因子環の包含の構造を調べた。  
(4) 作用素環のユニタリ群のPolish群としての種々の大域的性質を調べた。性質(FH)を持つが性質(T)を持たない群の多くの例を発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Bicentralizer flowを巡る今回の研究は今後のIII<sub>1</sub>型因子環のbicentralizer問題の研究に対する基礎になると考えられる。(relative) bicentralizer flowとConnes-竹崎のflow of weightsが共役になるのではないかと予想している。この予想はある程度自然であり、今後予想の検証過程で意外な発見もあるかもしれない。自己共役作用素の摂動に関する研究はユニタリ群のPolish群としての構造やその性質に関する興味深い知見をもたらした。今後非局所コンパクトPolish群の大域構造を研究する際に今回の研究結果が応用できるかもしれない。

研究成果の概要(英文)：The following are the main results of our project.(1) In the space of (possibly unbounded) self-adjoint operators, we determined exactly on which closed subsets of the real line the analogue of the Weyl-von Neuman theorem holds.(2) We constructed a strongly unitarily representable Polish SIN group which is not of finite type(3) We constructed a one-parameter automorphism group of  $R_+$  on the relative bicentralizer algebra defined for an inclusion of type III factors (the smaller one being of type III<sub>1</sub>). We used showed that the properties of this flow are closely related to the structure of the underlying type III subfactors.(4) We studied global properties of the unitary groups of  $C^*$  and von Neumann algebras. In particular, we showed that there are many unital  $C^*$  algebras  $A$  for which the identity component  $U_0(A)$  of its unitary group has property (FH) (any continuous affine isometric action on a real Hilbert space admits a fixed point) but fails to have property (T) of Kazhdan.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環論 Polish群

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 関数解析学と記述集合論は近年交流を深め、特に作用素環論における様々な同値関係の複雑さを Borel reducibility の意味で定量化する研究が盛んにおこなわれてきた。しかし非有界自己共役作用素達は自然な Polish 空間をなすにも関わらず、そこに登場する摂動問題の複雑さについては筆者と松澤泰道氏(信州大学)の1つの研究を除けばほぼ何も無かった。

(2) Popa はコサイクル超剛性定理の研究に於いて、有限型 Polish 群のクラス(有限型 von Neumann 環のユニタリ群の強閉部分群に同型な Polish 群)を導入し、「ヒルベルト空間のユニタリ群の強閉部分群に同型(unitarily representable)で、かつ両側不変距離を持つ(SIN) Polish 群は有限型か?」を問うた。私と松澤氏は以前の研究で、従順群などに対して肯定的解答を与えていたが、一般の場合は未解決であった。

(3) 筆者と Uffe Haagerup, Carl Winslow 氏による一連の von Neumann 環の超積の一般構造の研究以来、III 型環の研究にも超積のテクニックが有効である事が近年認識され、II 型環における Popa の剛性理論の一連の定理を III 型環に拡張する多くの研究が与えられていた。この際しばしば重要になる事として、忠実正則状態でその「中心化環が大きいもの」が存在する、という条件である。この条件は III\_1 型環以外では常に満たされ、III\_1 の場合には Connes の bicentralizer 問題と呼ばれている難問であった。しかし bicentralizer 問題が他の問題と関わっているかどうかは不明だった。この問題は、超積研究を開始した当初から気にしていた問題であった。

### 2. 研究の目的

- (1) 非有界作用素の摂動論の問題や、関連するユニタリ群の作用について調べる事。  
具体的な Polish 群のユニタリ表現の族を調べる事。
- (2) Popa の問題を完全解決する事。
- (3) 超積の研究を深め、III 型環、特に bicentralizer 環の構造研究に活かす事。

### 3. 研究の方法

当初想定していた研究手法は下記のとおりである。

- (1) スペクトル理論とボレル集合の構造を用いる。
- (2) von Neumann 環論と Polish 群の理論を用いる。
- (3) von Neumann 環の超積の理論を用いる。

実際には研究の過程で予想外の道具が必要になる事があった(研究成果でより具体的に述べる)。

### 4. 研究成果

(1)  $H$  を可分 Hilbert 空間とし、 $SA(H)$  で  $H$  上の(有界と限らない)自己共役作用素の空間に強レゾルベント収束位相を与え、Polish 群と見做す。 $R$  の閉部分集合  $F$  に対して、「本質的スペクトルが  $F$  である任意の2つの自己共役作用素は、コンパクト作用素による摂動を除き、ユニタリ同値」であるとき、 $F$  上 Weyl-von Neumann の定理が成り立つ、と呼ぶことにする。私と松澤氏はそのような  $F$  の特徴づけを与えた。(なお、「コンパクト作用素」をシャッテンクラス作用素にした場合には、 $F=R$  のみが Weyl-von Neumann の定理を満たす事も分かる)  $F$  の満たすべき条件は比較的単純なものである。Weyl-von Neumann 型の定理が非有界作用素に対して全く成り立たない事は既に松澤氏との先行研究で記述集合論の手法から証明できていたが、一方で  $F=R$  の場合には定理が成り立ってしまう事も気づいていた。しかしこのような特徴付が存在するという事はしばらく想定しておらず、この事実を発見する事は証明を与える事よりも非自明であった。

(1)に関連して、私は松澤氏と作用素環のユニタリ群の Polish 群としての種々の大域的性質を調べた。特に性質(FH)を持つが性質(T)を持たない群の多くの例を発見した(そのようなユニタリ群の最初の例は、Pestov により与えられた)。また Hilbert-Schmidt ユニタリ群  $U_2(H)$  が性質(FH)を持つか?という Pestov の問を、より強い形で否定的に解決した： $M$  を可分半有限無限因子環で、半有限忠実正則トレースを固定する。このとき  $1 < p < \infty$  に対して、 $U_p(M, \tau)$  でユニタリ  $u \in U(M)$  で、 $u^{-1}$  がトレースに関して  $L^p$  であるもの全体のなす Polish 群(距離は  $L^p$  距離で与える)とする。 $G$  を  $U_p(M, \tau)$  の閉部分群で、性質(FH)を持つものとするとき、ある有限射影  $q \in M$  が存在して、 $G$  は自然な包含写像を  $q$  で cut した写像により  $U(qMq)$  の強閉部分群に同型である。特にこの事から次の事が従う： $U_2(H)$  の閉部分群で性質(FH)を持つものは compact Lie 群である。

(2) 可算離散群  $\Gamma$  の  $H$  への可逆変換としての表現  $\rho$  が一様有界であるとは、作用素ノルム  $\|\rho(g)\|$  が  $g \in \Gamma$  によらない定数で抑えられる事を言う。一様有界表現  $\rho$  により  $\rho$  を  $H$  に作用させ、その半直積群  $G$  を考える。私は松澤、Andreas Thom (TU Dresden), Asger Törnquist (University of Copenhagen) と共に次を示した：

(i)  $G$  は常に unitarily representable かつ SIN

(ii)  $G$  が有限型である事と、 $\Gamma$  がユニタリ表現に相似である事は同値。

$\Gamma$  が階数 2 の自由群を含むとき、ユニタリ表現に相似でない一様有界表現を持つ事が知られており、そのような表現から  $G$  を作ると、Popa の問題の反例になる事が分かる。この意味で反例と一様有界表現のユニタリ化可能性は 1 対 1 に対応している。証明の鍵は Banach 空間論における Maurey-Nikishin の分解定理の  $\Gamma$ -同変版を証明する事にある。

(3) 私は Uffe Haagerup, Cyril Houdayer, Amine Marrakchi と共に次の研究を行った。Bicentralizer の概念は増田により III 型因子環の包含  $N \not\subseteq M$  に ( $N$  は III<sub>1</sub> 型とする) 対して定義された。この相対 bicentralizer 環  $B(N \not\subseteq M, \tau)$  (忠実正則条件付期待値と可換な忠実正則状態  $\tau$  を固定する) 上に、ある種の漸近条件により特徴付けられる 1 係数自己同型群 (bicentralizer flow) が存在する。この flow は共役を除き状態  $\tau$  の取り方に依らない。さらに次が成り立つ:

$M=N=B(M, \tau)$  とするとき、 $M$  が荒木・Woods の III<sub>1</sub> 型因子環をテンソル積で吸収する事と、bicentralizer flow が自明である事は同値。

包含  $N \not\subseteq M$  が既約 ( $N' \cap M=C$ ) であるとする。このとき忠実正則条件付期待値の像となる AFD 部分因子環  $P \not\subseteq N$  で、 $P' \cap M=C$  なるものが存在する事と、bicentralizer flow がエルゴード的である事は同値 (本研究結果をまとめた論文が公表された数か月後に Marrakchi  $M=N$  の場合に実際に flow がエルゴード的であることを証明した)。さらに、この同値条件が成り立つとき、 $P$  を II<sub>1</sub> 型にとれる為には、 $B(N \not\subseteq M, \tau)=C$  が必要十分である。

既約な AFD 部分因子環  $P$  で、正則条件付期待値の像となるものが取れるか? という問題は 1980 年代の Popa の研究により半有限の場合には完全に解決されていた。また少し後になって III<sub>1</sub> 以外の III 型の場合も Popa により解決された。III<sub>1</sub> 型の場合のみが未解決になっていたが、解決の為には bicentralizer の自明性を証明する必要がある事がわかった。

$N \not\subseteq M$  が既約であるとき、 $N$  の極大可換部分環で、正則条件付期待値の像となるものが取れる (強い意味で Kadison 問題が肯定的に解ける) 為には、 $B(N \not\subseteq M, \tau)=C$  が必要十分。

最後の  $\Gamma$  に現れる極大可換部分環の存在問題は、Kadison の問題として知られる古典的未解決問題であり、この問題は  $N, M$  が III 型以外の因子環の場合には Popa の結果により、(可分性や正則条件付き期待値  $M \not\subseteq N$  の存在下で) 肯定的に解決されていた。III<sub>1</sub> 型の場合、bicentralizer の自明性が (強い意味での) 同問題が解かれるための唯一の障害となっている事が明らかになった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ando Hiroshi, Matsuzawa Yasumichi, Thom Andreas, Tornquist Asger	4. 巻 0
2. 論文標題 Unitarizability, Maurey-Nikishin factorization, and Polish groups of finite type	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2017-0047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ando Hiroshi, Matsuzawa Yasumichi	4. 巻 49
2. 論文標題 When does the Weyl-von Neumann Theorem hold?	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 742 ~ 744
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) DOI: 10.1112/blms.12064	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroshi Ando and Yasumichi Matsuzawa	4. 巻 72
2. 論文標題 Descriptive analysis of self-adjoint operators and the Weyl-von Neumann Theorem	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 IM Lecture notes	6. 最初と最後の頁 119-128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hiroshi Ando and Eberhard Kirchberg	4. 巻 94
2. 論文標題 Non-commutativity of the central sequence algebra for separable non-type I $C^*$ algebras	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 280-294
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1112/jlms/jdw035">https://doi.org/10.1112/jlms/jdw035</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiroshi Ando, Uffe Haagerup, Cyril Houdayer and Amine Marrakchi	4. 巻 376
2. 論文標題 Structure of bicentralizer algebras and inclusions of type III factors	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1145-1194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s00208-019-01939-9">https://doi.org/10.1007/s00208-019-01939-9</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 A family of positive type functions on the orthogonal Hilbert-Schmidt group
3. 学会等名 Workshop analysis and group theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 Structure of bicentralizer algebras and inclusions of type III factors
3. 学会等名 18th workshop noncommutative harmonic analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 On the Krupa-Zawisza ultraproduct of self-adjoint operators
3. 学会等名 UC Irvine conference model theory and operator algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 安藤浩志
2. 発表標題 Weyl-von Neumann の定理を巡って
3. 学会等名 第5回 山陰 基礎論・解析学 研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 Ultraproduct of self-adjoint operators and the conjugation action of the unitary group
3. 学会等名 Structure and dynamics of Polish groups conference (EPFL) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 Unitarizability, Maurey-Nikishin factorization and Polish groups of finite type
3. 学会等名 C* algebras (ID 1634) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 Unitarizability, Maurey-Nikishin factorization and Polish groups of finite type
3. 学会等名 Classification and dynamical systems II: von Neumann algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ando
2. 発表標題 Descriptive analysis of self-adjoint operators and the Weyl-von Neumann Theorem
3. 学会等名 Mathematical quantum field theory and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 安藤浩志
2. 発表標題 Polish groups of unitaries
3. 学会等名 日本数学会 秋季会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	松澤 泰道 (Matsuzawa Yasunichi)	信州大学・教育学部・助教  (13601)	
研究協力者	ハーゲラップ ウッフエ (Haagerup Uffe)		
研究協力者	ウーデイエ シリル (Houdayer Cyril)	パリ南大学・Professor	

## 6. 研究組織 (つづき)

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	マラケシ アミン (Marrakchi Amine)	パリ南大学・PhD	
研究協力者	トム アンドレアス (Thom Andreas)	ドレスデン工科大学・Professor	
研究協力者	トーンキスト アスガー (Tornquist Asger)	コペンハーゲン大学・Associate professor	
研究協力者	キルヒバーグ エバーハート (Kirchberg Eberhard)	ベルリン フンボルト大学・Professor Emeritus	