

令和元年6月19日現在

機関番号：13101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17610

研究課題名（和文）1次元2×2保存則方程式系のエントロピー解

研究課題名（英文）The study of the entropy solutions of one dimensional 2 times 2 systems of conservation laws

研究代表者

應和 宏樹 (Ohwa, Hiroki)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：10549158

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：1次元2×2保存則方程式系の初期値問題のエントロピー解の一意可解性問題の解決への糸口を探ることを目的として、Temple型と類似の形の方程式である空間変数に対してのみ不連続な流束をもつ保存則方程式、及び（より一般の）不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題に対するエントロピー解の一意可解性を示した。さらに、（滑らかな流束をもつ）保存則方程式の初期値問題のエントロピー解の初期値と流束に関する L^1 の意味での連続依存性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数理科学の様々な分野において、各種物理量の時間発展はそれら物理量の保存則方程式から導かれる複数の非線形偏微分方程式（保存則方程式系）で記述される。保存則方程式系の研究は1950年代から多くの研究者によって行われてきたが、その系統的な結果は未だに得られていない。こうしたことから、保存則方程式系の研究は今後の発展に期待されており、学術的に大きな意義を持つ研究課題であると言える。このような学術的背景の中で、本研究課題では、保存則方程式系の初期値問題の一意可解性問題の解決への糸口を探ることを目的として研究を行い、ある一定の成果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：In order to find clues to solve the existence and uniqueness of the entropy solutions to the initial value problem for one dimensional 2×2 systems of conservation laws, we proved the existence and uniqueness of the entropy solutions to the initial value problems for a scalar conservation law of similar form to the Temple type, with a flux function which is a smooth function multiplied by a discontinuous coefficient on the spatial location, and for a scalar conservation law with a flux function which is (more generally) discontinuous with respect to the unknown function. Moreover, we proved the continuous dependence in the sense of L^1 on the initial value and the flux of the entropy solutions to the initial value problems for a scalar conservation law (with smooth flux).

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：実解析 保存則方程式 非線形現象

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

保存則方程式の初期値問題の弱解は、一般に一意でないので、適切な解を選ぶためにエントロピーの概念を導入する必要がある。このエントロピーの概念によって選出された弱解をエントロピー解という。1次元(単独)保存則方程式の初期値問題に対するエントロピー解の一意可解性は、1970年にS. Kurzhkovによって解決された。その証明で導入されたエントロピーは、現在では、Kruzhkov型のエントロピーと呼ばれている。その結果から30年以上の長い間、1次元保存則方程式系の初期値問題に対するエントロピー解の一意可解性は未解決であったが、A. Bressanらのグループによって、全変動が十分小さい初期値に対する初期値問題に対する(Lax型の)エントロピー解の一意可解性がRiemann問題の解を構成要素とする波面追跡法により解決された。その証明でキーとなるのが、2つの解の差を測るために構成された汎関数に関して解の差が初期値の差に(L^1 の意味で)縮小的に依存されることが示されることで、保存則方程式系の初期値問題に対する解作用素がリプシッツ半群を形成することである。この証明手法は、現在ではBressan理論と呼ばれ、保存則方程式系を解析する上で必須な道具となっているが、その証明は難解で複雑な表現をもつ。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、Kruzhkov型のエントロピーの拡張とBressan理論の一般化、及び簡略化を行うことにより、より一般の初期値をもつ1次元保存則方程式系の初期値問題に対するエントロピー解の一意可解性問題の解決への糸口を探ることである。以下で研究の目的を研究項目ごとに述べる。

(1) Temple型について

衝撃波曲線と希薄波曲線が一致する保存則方程式系をTemple型という。研究当初は、Temple型の1次元 2×2 保存則方程式系の初期値問題に対するエントロピー解の一意可解性を示す予定であったが、その結果はすでにA. Bressanらのグループによって示されていることが判明したため、Temple型と類似の形の方程式である空間変数に対してのみ不連続な流束をもつ1次元(単独)保存則方程式の初期値問題に対するエントロピー解の一意可解性を示すことを目的とし、研究を行うことにした。

(2) 不連続な流束をもつ保存則方程式について

申請前の予備的な検証で、1次元 2×2 保存則方程式系の初期値問題の解構造は、(より一般の)不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題の解構造と類似な点があることが明らかになっていたため、まず手始めに、流体力学における相転移を表す不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題に対してKruzhkov型のエントロピーを拡張し、その一意可解性を示すことを目的として研究を行うことにした。

(3) 流束に対する解の連続依存性について

一般の1次元 2×2 保存則方程式系の初期値問題に対するエントロピー解の一意可解性問題の解決への糸口を探るため、一旦、1次元(単独)保存則方程式の初期値問題に対するエントロピー解の一意可解性についての研究に立ち返り、その流束に対する解の連続依存性をより一般の形で示すことを目的とし、そのための準備として、まず、1次元(単独)保存則方程式の初期値問題の波面追跡法から構成される近似解の初期値と流束に関する L^1 の意味での連続依存性についての研究を行うことにした。

3. 研究の方法

以下で研究の方法について研究項目ごとに述べる。

(1) Temple型について

すでに申請の段階でTemple型の1次元 2×2 保存則方程式系に対してKruzhkov型のエントロピーを拡張することに成功していたので、そのエントロピー(の概念)を用いて、Temple型と類似の形の方程式である空間変数に対してのみ不連続な流束をもつ1次元(単独)保存則方程式の初期値問題に対してエントロピーを導入することが出来るか検証した。また、保存則方程式系に対する理論であるBressan理論を1次元(単独)保存則方程式の初期値問題に対して一般化、及び簡略化し、そのエントロピー解の一意可解性を示すことを試みた。

(2) 不連続な流束をもつ保存則方程式について

(より一般の)不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題の一意可解性を議論するためには、弱解の概念を拡張する必要がある。そこで、まず、Dias-Figueira-Rodriguesによって導入された弱解の概念の拡張を試みた。次に、Kruzhkov型のエントロピーを拡張するためには、 L^1 -縮小性をもつ解を探す必要がある。そこで、 ρ . Oleinikによる衝撃波許容条件に注目した。その条件を不連続な流束をもつ保存則方程式に対して一般化し、その許容条件を満足する衝撃波を用いた波面追跡法を新たに提案することで、その初期値問題に対してエントロピーを導入

できるのではないかと考え、検証を行った。最後に、Bressan 理論を不連続な流束をもつ保存則方程式に対して適用できるように一般化を行い、その理論を用いることで、その初期値問題の弱解の L^1 -縮小性に関する評価式を得ることができるか試みた。

(3) 流束に対する解の連続依存性について

不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題を議論する際に導入した手法を応用することで、(滑らかな流束をもつ) 1次元(単独)保存則方程式の初期値問題の波面追跡法から構成される近似解は初期値と流束に関して L^1 の意味で連続的に依存していることが出来るのではないかと考え、検証を行った。従来の方では、S. Kruzhkov の一意性に関する結果を用いることで、波面追跡法から構成される近似解が L^1 の意味でコーシー列となることを(ある意味で間接的に)示しているが、このような結果を示すことが出来れば、波面追跡法から構成される近似解は L^1 の意味でコーシー列となることが直接的にわかる。さらに、従来の方では知ることが出来なかった波面追跡法から構成される近似解の収束率に関する結果を得ることが出来る。

4. 研究成果

本研究課題で得られた研究成果(現在、投稿中、もしくは投稿準備中のものも含む)を研究項目ごとに述べる。

(1) Temple 型について

Temple 型の 1次元 2×2 保存則方程式系に対して Kruzhkov 型のエントロピーを拡張し、そのエントロピー(の概念)を用いることで、Temple 型と類似の形の方程式である空間変数に対してのみ不連続な流束をもつ 1次元(単独)保存則方程式の初期値問題に対してエントロピーを導入した。さらに、保存則方程式系に対する理論である Bressan 理論をその初期値問題に対して一般化、及び簡略化し、そのエントロピー解の一意可解性を示すことが出来た。

(2) 不連続な流束をもつ保存則方程式について

まず、Dias-Figueira-Rodrigues によって導入された弱解の概念を(より一般の)不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題に対して拡張した。次に、O. Oleinik による衝撃波許容条件を不連続な流束をもつ保存則方程式に対して一般化し、その許容条件を満足する衝撃波を用いた波面追跡法を新たに提案することで、流体力学などにおける相転移を表す不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題の可解性を示した。最後に、Bressan 理論を不連続な流束をもつ保存則方程式に対して適用できるように一般化を行った。その一般化された方法を用いることで、(相転移を表す)不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題の弱解の L^1 -縮小性に関する評価式を得ることができる。もちろん、その証明において一般化された衝撃波許容条件は重要な役割を果たしており、その許容条件は弱解の L^1 -縮小性を得るための十分条件を与えていることがわかる。

(3) 流束に対する解の連続依存性について

不連続な流束をもつ保存則方程式の初期値問題を議論する際に導入した手法を応用することで、滑らかな流束をもつ 1次元(単独)保存則方程式の初期値問題の波面追跡法から構成される近似解は初期値と流束に関して L^1 の意味で連続的に依存していることを示した。この結果により、波面追跡法から構成される近似解は L^1 の意味でコーシー列となることが直接的にわかる(すなわち、部分列の意味ではなく、その近似解の列そのものが L^1 の意味で収束することがわかる)。また、滑らかな流束をもつ保存則方程式の初期値問題のエントロピー解が初期値と流束に関して L^1 の意味で連続的に依存していることを示した。さらに、流束を滑らかな関数からリップシツ連続な関数に一般化し、同様の結果が得られるか考察し、ある一定の成果を得た。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 6 件)

(1) 佐々木 善雅, 應和 宏樹, 単独保存則方程式の解の初期値と流束に関する連続依存性について, 日本数学会 2019 年度年会, 2019 年 3 月 20 日, 東京工業大学大岡山キャンパス

(2) 佐々木 善雅, 應和 宏樹, L^1 contractive solutions for scalar conservation laws with discontinuous flux functions, 第 44 回発展方程式研究会, 2018 年 12 月 26 日, 日本女子大学目白キャンパス

(3) 皆川 夏樹, 鈴木 宏弥, 佐々木 善雅, 應和 宏樹, 波面追跡法から構成される近似解の初期値と流束に関する安定性について, 第 44 回発展方程式研究会, 2018 年 12 月 25 日, 日本女

子大学目白キャンパス

(4) 佐々木 善雅, 應和 宏樹, 不連続な流束をもつ保存則方程式の一意可解性について, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会, 2018 年 9 月 27 日, 岡山大学津島キャンパス

(5) 佐々木 善雅, 應和 宏樹, 相転移を記述する保存則方程式の一意可解性について, 第 43 回発展方程式研究会, 2017 年 12 月 25 日, 日本女子大学目白キャンパス

(6) 佐々木 善雅, 應和 宏樹, ある不連続な流束をもつ保存則方程式の一意可解性について, 第 42 回発展方程式研究会, 2016 年 12 月 26 日, 日本女子大学目白キャンパス

〔図書〕(計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究協力者

研究協力者氏名: 佐々木 善雅

ローマ字氏名: Yoshimasa Sasaki

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。