

令和元年6月7日現在

機関番号：16401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17615

研究課題名（和文）フラクタル格子上的長距離浸透モデルに対するランダムグラフの構造の解明

研究課題名（英文）Elucidation of the structure of random graphs for the long-range percolation on fractal lattices

研究代表者

三角 淳 (MISUMI, Jun)

高知大学・教育研究部自然科学系理工学部門・准教授

研究者番号：70534048

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,500,000円

研究成果の概要（和文）：フラクタル格子上的長距離浸透モデルの性質を明らかにすることを目的として研究を行った。Pre-Sierpinski carpetと呼ばれる重要なフラクタル格子を一般化し、さまざまな変則的な形状のグラフも含めて、その上での長距離浸透モデルのランダムグラフの直径の評価を得た。さらにツリー上の長距離浸透モデルに対して同様の問題を考察した。また、pre-Sierpinski gasketと呼ばれる基本的なフラクタル格子上の長距離浸透モデルに対して、ランダムグラフ上のランダムウォークの混合時間について研究を行い、さらにランダムウォークの性質と深く関わるランダムグラフの等周定数の評価を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

最も基本的な浸透モデルであるボンドパーコレーションは、例えば伝染病などが隣接したもの同士を伝わって広がる様子に対応する数学の問題であるのに対して、長距離浸透モデルは、例えばコンピューターウイルスなどが遠く離れた場所に急速に広がる様子に対応する問題といえる。本研究では、長距離浸透モデルの性質をフラクタル格子のような特殊な空間上で調べるという独自の着眼点からの研究によって、他のさまざまな分野と関連し、従来考えてこなかった新しいタイプの現象の理解につながり得る問題について、解明を進めた。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is to elucidate the property of the long-range percolation on fractal lattices. We generalized the important fractal lattice called pre-Sierpinski carpet, and on the graphs including various graphs with irregular shapes, we obtained estimates on the diameter of the long-range percolation random graph. Further, we considered the corresponding problem for the long-range percolation on the tree. Also, for the long-range percolation on the fundamental fractal lattice called pre-Sierpinski gasket, we studied the mixing time of the random walk on the random graph, and further obtained estimates on the isoperimetric constant which is much correlated with the property of the random walk.

研究分野：確率論

キーワード：長距離浸透モデル フラクタル格子 ランダムグラフ ランダムウォーク

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

浸透モデル(パーコレーション)は、ランダムグラフの性質を調べることによって相転移の現象を数学的に解明することを目的とした確率モデルであり、その本格的な研究は1950年代に始まる(Broadbent-Hammersley, 1957)。近年では、2000年代に登場したSLE(Schramm-Loewner evolution)の理論は、ブラウン運動などの伝統的な確率解析の手法を、浸透モデルをはじめとした離散的な確率モデルの問題に応用し、臨界指数の特定のような重要な問題に解決の道筋をつけた画期的なものであり、2006年にWerner、2010年にSmirnovがフィールズ賞を受けた業績は、この理論と密接に関係している。

浸透モデルとして最も基本的な設定は、ボンドパーコレーションと呼ばれる。これは、空間上の隣接した点同士がランダムな辺でつながるようなランダムグラフを考え、その性質について調べるものである。そのような基本的なモデルに対して研究を深く掘り下げていく方向性の一方で、現在では、ボンドパーコレーション以外の多様な設定へと研究の幅を広げる方向性も見られるようになった。本研究で扱う長距離浸透モデル(ロングレンジパーコレーション)もその一つであり、1980年代以降、本格的な研究が行われるようになった(Schulman, 1983)。これは、空間上の遠く離れた点同士に対しても、距離に応じた確率でランダムな辺でつながるようなランダムグラフを考え、その性質について調べるものである。

浸透モデルをどのような空間上で考えるかについては、これまでの研究においては、正方形格子や三角格子などの上で考察されたものが比較的多い。一方で、フラクタルのような特殊な空間については、興味深い研究対象として確率論に限らずさまざまな視点から研究が行われているが、フラクタル格子上における浸透モデルに関してはまだ手付かずの課題が多く存在する。

2. 研究の目的

本研究で扱う長距離浸透モデルは、各点から出るランダムな辺の本数がいくらかでも多くなる可能性がある。そのため、ボンドパーコレーションの問題と比較して、このモデル特有の技術的な困難さや煩雑さを伴い、その解明はまだ限定的にしか進んでいない。

研究代表者がこれまでに行ってきた研究のうち本研究に深く関わるものとして、まず、フラクタル的な構造を持つ空間上における長距離浸透モデルを定義し、ある程度一般的な設定の下で、無限クラスターの存在確率などについて調べた。解明できた範囲は限定的だが、長距離浸透モデルのパラメーターの臨界値と、空間のハウスドルフ次元の間に密接な関係があることを明らかにした。また、その研究を発展させて、最も基本的なフラクタル格子の一つとしてよく知られるpre-Sierpinski gasketに対して、その上の長距離浸透モデルによって定まるランダムグラフのさまざまな性質のうち、特にランダムグラフの直径に着目し、そのオーダーの評価を行った。さらに、その結果を応用して、pre-Sierpinski gasket上の長距離浸透モデルに対して、ランダムな辺がある程度できやすい場合のランダムグラフ上のランダムウォークの問題について考察し、混合時間のオーダーの特定を行った。

これらの研究の延長線上で、フラクタル格子上での長距離浸透モデルに関する未解決課題の解明をさらに進めていくことが、本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) さまざまな形のフラクタル格子に対する、ランダムグラフの直径の評価の一般化:

長距離浸透モデルによって定義されるランダムグラフの直径に関する評価は、既に結果の得られているpre-Sierpinski gasket上の場合と同様の結果が、他のさまざまな格子においてもある程度成り立つことが予想される。そこで、別の重要なフラクタル格子であるpre-Sierpinski carpetや、それを一般化したグラフを考えるときに、具体的にどのような条件下でランダムグラフの直径の評価が成り立つか、および長距離浸透モデルのパラメーターの臨界値がどのようになるかを調べる。

(2) Pre-Sierpinski gasketの場合に限定した、ランダムグラフの性質に関する精密化:

比較的考察しやすいpre-Sierpinski gasketの場合に限って、その上での長距離浸透モデルの性質についてさらに深く掘り下げて考察する。ランダムグラフを固定することに、その上を辺に沿って移動するランダムウォークを考え、そのようなランダムウォークの性質や、それを導く上で鍵となるランダムグラフの詳しい性質について、長距離浸透モデルのパラメーターの値を動かした際の挙動の変化に着目して調べる。

4. 研究成果

(1) さまざまなフラクタル格子に対する、ランダムグラフの直径の評価の一般化に関する研究として、まず、重要なフラクタル格子の一つであるpre-Sierpinski carpetを一般化したグラフとして、generalized pre-Sierpinski carpetを構成し、その上での長距離浸透モデルの問題について考えた。当初は、generalized pre-Sierpinski carpetを構成する際に、有限グラフの増加列を規則的な方法によって定義していたが、その後、改良を試み、有限グラフの増加列をある程度の不規則性も許す方法に拡張してあらためて定義し直した。このようにして定義されたグラフは、pre-Sierpinski carpetを含むいろいろなフラクタル格子だけでなく、狭い意味でのフラクタル格子に属さない、さまざまな変則的な形のグラフも含めて考えたものとな

っている。そのようなグラフ上において、点同士の距離が大きくなるに従って、ランダムな辺のできる確率が冪のオーダーで減少していくような長距離浸透モデルを考えた。ランダムな辺のできる確率が、非常に大きい場合、ある程度大きい場合、小さい場合のそれぞれに対して、pre-Sierpinski gasket 上での長距離浸透モデルの場合と同様の手法を用いることによって、ランダムグラフの直径の評価を得た。

また、上記の研究内容から派生する形で、ツリー上の長距離浸透モデルに対しても、ランダムグラフの直径の大きさについて研究を行った。ここでは、それぞれの頂点から出ている辺の本数が一定である正則ツリーの場合を考えた。なお、ツリー自体はフラクタル格子とは異なるものであるが、定理の証明の際にはフラクタル格子の場合に適用したものとある程度共通する手法を用いて考えている。ツリー上の長距離浸透モデルの場合には、点同士の距離が大きくなるに従って、ランダムな辺のできる確率が冪のオーダーで減少していく条件の下では、自明な結果となる。そこで、点同士の距離が大きくなるに従って、ランダムな辺のできる確率が指数関数的な速さで減少していくような条件の下で長距離浸透モデルを考えた。点同士のつながりやすさを与えるパラメーターの値が、小さい場合と大きい場合のそれぞれに対して、ランダムグラフの直径の評価を得た。パラメーターの値が中間的な領域の場合は、現時点では解決に至っていない。それ以外に、ゴルトン・ワトソン過程のようなランダムなツリー上において同様の問題を考えるとどうなるかという課題も考えられ、発展性のある問題といえる。

(2) Pre-Sierpinski gasket に限定した、ランダムグラフの性質の精密化に関する研究として、まず、pre-Sierpinski gasket 上の長距離浸透モデルから定まる、ランダムグラフ上のランダムウォークに関する研究を行った。グラフ上の点同士の間にランダムな辺のできる確率がある程度大きい場合に対して、ランダムウォークの混合時間のオーダーに関する研究成果を論文として投稿し、掲載された。エルゴード的なマルコフ連鎖の n ステップ推移確率は長時間経過したときに定常分布に収束するが、混合時間は、定常分布にどれくらい速く近づくかを特徴付ける重要な量である。現時点では、得られている混合時間の評価はランダムな辺がある程度できやすい場合に限られており、ランダムな辺のできる確率が小さい場合における混合時間の評価を得るまでには至っていない。これは、1次元長距離浸透モデルの場合に関する先行研究 (Benjamini-Berger-Yadin, 2008) の証明の中で用いられている、1次元の場合に成立するエルゴード定理がpre-Sierpinski gasket の場合には適用できないことが技術的な障壁となっており、さらなる工夫が必要と考えられる。

また、pre-Sierpinski gasket 上の長距離浸透モデルに対して、ランダムグラフ上のランダムウォークの性質と深く関係する量である、ランダムグラフの等周定数について考察を行った。グラフ上の点同士の間にランダムな辺のできる確率が、ある程度大きい場合、小さい場合のそれぞれに対して、等周定数のオーダーを特定した。なお、ランダムな辺のできる確率が非常に大きい場合は、頂点の次数が無限大となるためここでは考察の対象に含めていない。ランダムな辺のできる確率がある程度大きい場合は、上記のランダムウォークの混合時間の結果の簡単な系であり、ランダムな辺のできる確率が小さい場合は、直接的な計算により等周定数の評価を行った。1次元長距離浸透モデルの場合には、ある臨界値の前後でランダムウォークの混合時間のオーダーが不連続に変化することが知られている。Pre-Sierpinski gasket の場合に同様の性質が見られるかについてはまだ解明に至っていないが、一つの手掛かりとして、等周定数の性質に関して言えばpre-Sierpinski gasket と1次元の間にある程度の共通点が見られた。Pre-Sierpinski gasket 以外の場合も含めて、ハウスドルフ次元の値が1と2の間にあるいろいろなフラクタル格子を考え、長距離浸透モデルの性質が1次元のときと同様となる場合と、そうでない場合の境目がどこにあるのかについては今後の課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計3件)

三角淳, Sierpinski gasket 格子上的長距離浸透モデルにおけるランダムウォークの混合時間と等周定数, 確率論シンポジウム, 数理解析研究所講究録, 査読無, 掲載確定.

J. Misumi, The diameter of a long-range percolation cluster on generalized pre-Sierpinski carpet and regular tree, Journal of Statistical Physics, 査読有, 174, 2019年, 276-286.

DOI:10.1007/s10955-018-2181-z

J. Misumi, The mixing time of a random walk on a long-range percolation cluster in pre-Sierpinski gasket, Journal of Statistical Physics, 査読有, 165, 2016年, 153-163.

DOI: 10.1007/s10955-016-1611-z

〔学会発表〕(計5件)

三角淳, Sierpinski gasket 格子上的長距離浸透モデルにおけるランダムウォークの混合時間と等周定数, 確率論シンポジウム, 2018年.

三角淳, 一般化されたフラクタル格子上的長距離浸透モデル, 無限粒子系、確率場の諸問題 XIII, 2017年.

J. Misumi, Extension of the estimates on the graph diameter for long-range percolation, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2017 年.

三角淳, フラクタル格子上的長距離浸透モデルとランダムウォーク, 東京確率論セミナー, 2017 年.

三角淳, A remark on the graph diameter for long-range percolation on generalized pre-Sierpinski carpet, 大規模相互作用系の確率解析, 2016 年.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.kochi-u.ac.jp/misumi/>

6. 研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者

なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。