

令和 2 年 6 月 24 日現在

機関番号：15301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17617

研究課題名（和文）エントロピーを用いた有理曲面上の自己同型写像の解析

研究課題名（英文）Analysis of automorphisms on rational surfaces based on entropy

研究代表者

上原 崇人 (Uehara, Takato)

岡山大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：40613261

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究期間における重要な成果は、有理曲面を用いてK3曲面の構成を行ったことである。具体的には、複素射影平面上で楕円曲線内の9点ブローアップで得られる2つの有理曲面を用意して、適当な条件下で存在する正則な管状近傍をのりしろとして2つの有理曲面を貼り合わせることでK3曲面が構成されることを示した。本構成によるK3曲面族は射影的ではないK3曲面を含む広いクラスの族となっており、K3曲面上の力学系の解析に向けた基盤を築いたと考えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

射影的でないK3曲面についてはその具体的な記述が困難であるため、その上の双正則自己同型写像による複素力学系の解析は到底不可能であると考えられていた。しかしながら、本構成方法によるK3曲面は具体的な記述が可能な有理曲面の貼り合わせにより構成しているため、本研究の目的である双正則自己同型写像による複素力学系の解析が可能であると期待しており、本研究による構成方法がK3曲面に対して当初予定していなかった新しい見地を与える結果であると考えている。

研究成果の概要（英文）：We construct a family of K3 surfaces in terms of rational surfaces. More precisely, by using two rational surfaces obtained from the blowups of nine points on elliptic curves on projective spaces, we show that a family of K3 surfaces is given by patching two surfaces that are the complements of appropriate tubular neighborhoods of elliptic curves in the rational surfaces. The family contains non-projective K3 surfaces, which enables us to establish the basis for the study of dynamical systems on K3 surfaces.

研究分野：複素力学系，代数幾何学

キーワード：有理曲面 K3曲面 自己同型写像 エントロピー

1. 研究開始当初の背景

近年、コンパクト複素多様体上の双正則自己同型写像による複素力学系が活発に研究されている。当該研究は、複素・代数幾何における結果を解析的な力学系理論へ応用するため、融合分野に位置し、広範囲に影響を与えることが期待される。しかし、2次元多様体である複素曲面上においても、自己同型写像による力学系理論は未だ確立されていない。さらに、基本的な複素曲面である $K3$ 曲面上においては、例えば、フィールズ賞受賞者のマクマレンが射影的でない $K3$ 曲面上に、エントロピーが正となる自己同型写像を構成しているが、彼の構成ではトレリの定理を本質的に用いているため、自己同型写像のみならず、 $K3$ 曲面すらも具体的に記述することが困難であるため、これ以上踏み込んだ力学系の解析が困難であった。

2. 研究の目的

$K3$ 曲面はコンパクト複素曲面の特別なクラスであり、 $K3$ 曲面全体は局所的に 20 次元の複素多様体でパラメータ表示されることが知られている。一方、 $K3$ 曲面の族の具体的な構成例として、4 次曲面の族やクンマー曲面の族等が存在するが、知られている具体的な族はいずれも 19 次元以下となってしまふ。さらに、 $K3$ 曲面はいわゆるトレリの定理により、 $K3$ 曲面の同型類が周期写像によって決定されるため、周期写像が重要な意味をもつことになる。しかしながら、周期写像が計算可能な $K3$ 曲面の例はほとんど知られていない。

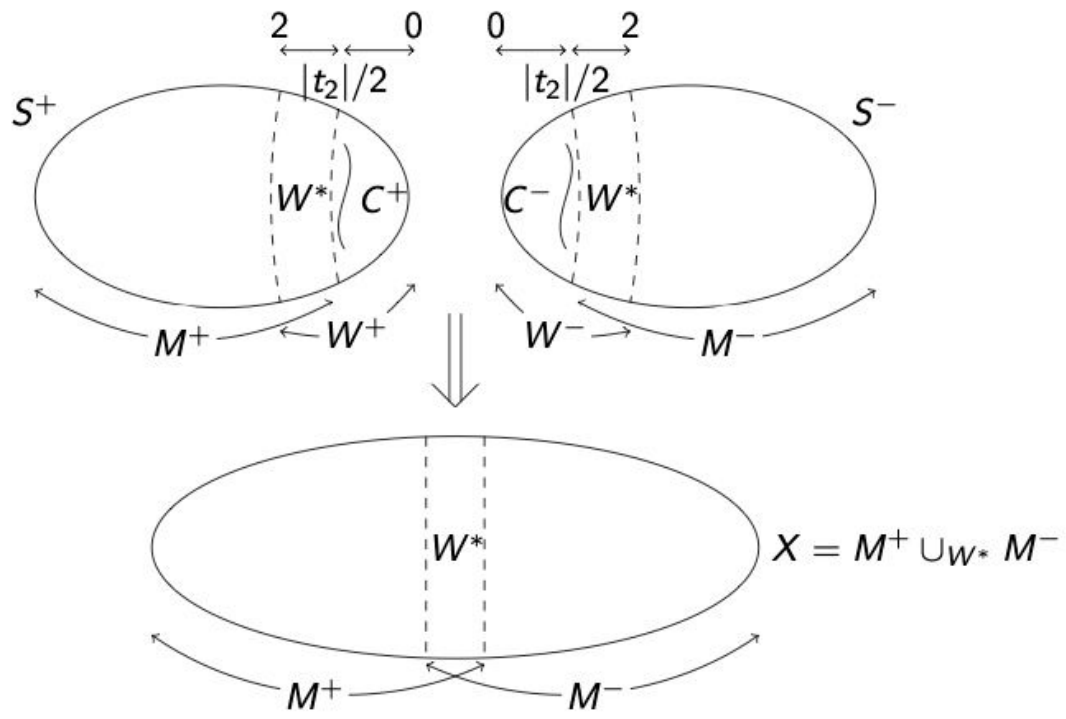
本研究の目的は、周期写像が具体的に計算可能な $K3$ 曲面を構成することで、これまでに知られている $K3$ 曲面上の自己同型写像を具体的に実現するとともに、より踏み込んだ力学系の解析を行うための基盤を固めることである。

3. 研究の方法

上記の通り、本研究の目的は、周期写像が具体的に計算可能な $K3$ 曲面を構成することで、 $K3$ 曲面上の自己同型写像を具体的に実現することである。そのためには、具体的に座標系が記述されている 2 次元射影空間もしくはそのブローアップで記述される有理曲面を用いて、 $K3$ 曲面を具体的に記述する方針で行った。

4. 研究成果

本研究では、複素射影平面上で楕円曲線内の 9 点ブローアップで得られる 2 つの有理曲面を用意して、2 つの有理曲面を貼り合わせることで $K3$ 曲面が構成されることを示した。具体的には、有理曲面内の楕円曲線の法束がディオファントス条件とよばれる条件を満たすとき、アーノルドの定理により楕円曲線の正則な管状近傍が存在することが示され、この管状近傍をのりしろとして 2 つの有理曲面を貼り合わせることで $K3$ 曲面が構成される。特筆すべき点は、本構成方法による $K3$ 曲面族の周期写像がほぼ計算可能であることと、周期写像を用いて $K3$ 曲面族の次元が計算可能であることである。具体的に、ディオファントス条件を満たす法束を固定する $K3$ 曲面族は 19 次元となることが示されるが、ディオファントス条件を満たす法束全体はピカル多様体内で測度 1 で存在するため、その意味で 20 次元に限りなく近い $K3$ 曲面族が構成されたことになる。実際、本構成による $K3$ 曲面族は射影的でない $K3$ 曲面を含む広いクラスの族となっている。具体的記述の可能な有理曲面を用いて、一般には具体的記述の困難な超越的 $K3$ 曲面の記述を可能にした点は重要である。特に、超越的 $K3$ 曲面上の力学系やその現象を具体的に描写される可能性があるため、今後の研究に期待される。さらに、ディオファントス条件を仮定せずに $K3$ 曲面が構成されれば、20 次元の $K3$ 曲面族が具体的に構成されることになり大きな進展となるが、これも今後の研究課題である。



5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 T. Kondo, T. Toyoda and T. Uehara	4. 巻 195
2. 論文標題 On a question of Gromov about the Wirtinger inequalities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Geom. Dedicata	6. 最初と最後の頁 203-214
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-017-0284-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Uehara	4. 巻 365
2. 論文標題 Rational Surface Automorphisms Preserving Cuspidal Anticanonical Curves	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Math. Ann.	6. 最初と最後の頁 635--659
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 15件/うち国際学会 7件）

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 A construction of non-projective K3 surfaces from rational surfaces
3. 学会等名 Complex geometry and complex dynamics in higher dimensions（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 有理曲面を用いた超越的K3曲面の構成について
3. 学会等名 複素領域における微分方程式とその周辺（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 K3曲面の構成と力学系への応用
3. 学会等名 可積分系理論から見える数理構造とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 Dynamical systems on complex surfaces
3. 学会等名 Workshop on Complex Analytic and Algebraic Methods in Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 複素曲面上の力学系
3. 学会等名 日本数学会2019年度会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 複素K3曲面の構成について
3. 学会等名 第52回函数論サマーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 Arnol'dの定理を用いた複素K3曲面の構成
3. 学会等名 第60回函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 On a construction of transcendental K3 surfaces: application of Arnol'd's theorem
3. 学会等名 RIMS Workshop on Complex Dynamics 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 複素曲面のダイナミカルスペクトラム
3. 学会等名 葉層構造の幾何学とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 Wirtinger不等式に関するGromovの問題について
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 On a construction of non-projective K3 surfaces
3. 学会等名 Positivity Concepts on Holomorphic Line Bundles and Theories on Canonical Kahler Metrics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takato Uehara
2. 発表標題 A construction of transcendental K3 surfaces
3. 学会等名 The 13th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 Rigidity of automorphisms on rational surfaces
3. 学会等名 Complex dynamical systems and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 On automorphisms of rational surfaces with positive entropy
3. 学会等名 多変数関数論冬セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 T. Uehara
2. 発表標題 On automorphisms preserving meromorphic two forms
3. 学会等名 Dynamics and Analysis in Several Complex Variables (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----