

令和元年6月13日現在

機関番号：17501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17618

研究課題名（和文）距離空間上のMusielak-Orlicz空間における楕円型偏微分方程式の研究

研究課題名（英文）Obstacle problem for Musielak-Orlicz Dirichlet energy integral on metric measure spaces

研究代表者

大野 貴雄 (Ohno, Takao)

大分大学・教育学部・准教授

研究者番号：40508511

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、ユークリッド空間では楕円型偏微分方程式の解に相当する、距離空間上のMusielak-Orlicz-Newtonian空間におけるDirichlet integralの最小値問題の解の存在について研究を行った。具体的には、Musielak-Orlicz-Newtonian空間を新たに定義し、様々な諸性質について研究を行った。さらにそれをもとにPoincareの不等式、Obstacle problemの解の存在、そしてDirichlet integralの最小値問題の解の存在を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究対象である距離空間上のMusielak-Orlicz空間は、様々な関数空間などを包括した関数空間であるため、本研究で得られた成果は、様々なタイプの楕円型偏微分方程式の解の存在や多様体上の微分幾何学やグラフ上の解析学などでの幅広い分野で応用されることが期待される。また本研究の成果は、宇宙開発だけでなく、ブレーキ、クラッチなどの応用デバイス開発、または、次世代フルードパワーシステムとして多くの分野で実用化・製品化への貢献が期待でき、社会貢献に大きなものが期待される。

研究成果の概要（英文）：In this work, we developed the theories for obstacle problems in the framework of Musielak-Orlicz-Sobolev space on a metric measure space.

We defined Musielak-Orlicz-Sobolev space on a metric measure space and proved basic properties of such spaces. We proved a Poincare inequality for Musielak-Orlicz Newtonian functions with zero boundary values in bounded open subsets. Using the Poincare inequality, we proved the existence and uniqueness of a solution to an obstacle problem for a Dirichlet energy integral on a bounded open set and proved the existence of superminimizers of Musielak-Orlicz Dirichlet energy integral on metric measure spaces.

研究分野：ポテンシャル論

キーワード：Musielak-Orlicz空間 Newtonian空間 距離空間 楕円型偏微分方程式 最小値問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

楕円型偏微分方程式の1つである p -ラプラス方程式は、古くから日本のみならず、世界中多くの研究者によって研究される重要な微分方程式の1つである。しかし近年、宇宙開発分野からの要請により、 p -ラプラス方程式をより一般化した楕円型偏微分方程式の研究が、下記の理由から求められるようになってきた。電場を印加することで粘弾性が変化する ER 流体は、高速制御性や機構の簡易性を活かし、NASA などで宇宙開発の分野への応用が非常に期待されていた。しかしその一方、ER 流体の高い制御性を得るためには、正確な ER 効果と流れの形態のモデル化が必要のため、さらなる研究の発展が求められてきた。このような問題に対し、近年、 $p(x)$ -ラプラス方程式が重要な役割を持つことが明らかになった。ここに、この解空間が、変動指数をもつ関数空間(一般化された Lebesgue 空間、一般化された Sobolev 空間)である。実際ここ 20 年、変動指数をもつ関数空間は上記のような要望から、100 人以上の研究者によって研究が進められてきた。

一方、 p -ラプラス方程式の解の性質を研究する上で、各種の線形作用素や準線形作用素の L^p 空間上($1 < p < \infty$)の有界性が議論されてきたが、次の段階として、 $p=1$ の近くや $p=\infty$ の近くの場合の研究の必要性が求められてきた。このとき、大きな力となったのが Orlicz 空間である。さらに近年では上記のような研究の発展により、3 つの関数空間(変動指数をもつ関数空間、Orlicz 空間と変動指数をもつ Orlicz 空間)を包括するような関数空間(Musielak-Orlicz 空間)が、少しずつ注目を集めるようになってきた。

また、2000 年頃から注目を集めているのが距離空間上での Sobolev 空間である。古典的には Sobolev 空間はユークリッド空間において定義されてきたが、一般の距離空間上での Sobolev 空間(Newtonian 空間、Hajlasz 空間)の研究が、微分幾何学やグラフ上の解析学、Riemann 多様体上の楕円型偏微分方程式などへの応用を念頭に、学際的かつ国際的に大きな進歩をしてきた。

このような学術的背景や研究の発展から、私は上記の関数空間を包括するような関数空間(距離空間上での Musielak-Orlicz-Sobolev 空間)における楕円型偏微分方程式の研究が今後、関連研究分野の進展、新しい学問分野の開拓等に大きな学術的波及効果が期待されると考えるようになった。

2. 研究の目的

近年、変動指数をもつ関数空間、Orlicz 空間や変動指数をもつ Orlicz 空間の研究が、宇宙開発の分野への応用が非常に期待されている電気粘性流体(ER 流体)の研究の更なる発展に必要であることがわかってきた。よって本研究では、この領域における研究の更なる発展のため、上記 3 つの関数空間を含む関数空間(Musielak-Orlicz-Newtonian 空間)を定義し、 n 次元ユークリッド空間では楕円型偏微分方程式の解に相当する、距離空間上の Dirichlet integral の最小値問題の解の存在を示すことを目的とした。

3. 研究の方法

Musielak-Orlicz-Newtonian 空間を新たに定義し、今後の研究に必要であろう諸性質について研究を行う。具体的には、Musielak-Orlicz-Newtonian 空間上の容量の性質、下限に達する弱上微分の存在、Musielak-Orlicz-Newtonian 空間と曲線上絶対連続な関数族との関係や境界上 0 の値をもつ Musielak-Orlicz-Newtonian 空間の性質などについて研究を行う。さらに、Musielak-Orlicz-Newtonian 空間における Mazya 型の不等式を示し、それをもとに境界上 0 の値をもつ Musielak-Orlicz-Newtonian 空間における Poincare の不等式について研究を行う。最

後に境界上0の値をもつ Musielak-Orlicz-Newtonian 空間における Poincare の不等式と一般的な関数空間における Mazur の補題を用いることで, Obstacle problem の解の存在, そして Dirichlet integral の最小値問題の解の存在について研究を行う.

4. 研究成果

本研究では, ユークリッド空間では楕円型偏微分方程式の解に相当する, 距離空間上の Musielak-Orlicz-Newtonian 空間における Dirichlet integral の最小値問題の解の存在を示した. 具体的には, Musielak-Orlicz-Newtonian 空間を新たに定義し, Musielak-Orlicz-Newtonian 空間上の容量の性質, 下限に達する弱上微分の存在, Musielak-Orlicz-Newtonian 空間と曲線上絶対連続な関数族との関係や境界上0の値をもつ Musielak-Orlicz-Newtonian 空間の性質などについて研究を行った. さらにそれをもとに Poincare の不等式, Obstacle problem の解の存在, そして Dirichlet integral の最小値問題の解の存在を示した.

本研究はその難解さから世界的にみてもほとんど研究が進んでいない Musielak-Orlicz 空間を研究対象とするところに意義があると思われる. また, 本研究対象である Musielak-Orlicz 空間は, Lebesgue 空間や Orlicz 空間, 変動指数をもつ関数空間などを包括した関数空間であるため, 本研究で得られた関数空間の性質や Dirichlet integral の最小値問題の解の存在は, 様々なタイプの楕円型偏微分方程式の解の存在に応用されることが期待される. 加えてユークリッド空間だけでなく距離空間上での解析を行うため, 実解析学だけでなく, 多様体上の微分幾何学やグラフ上の解析学などでの幅広い応用が期待される. さらに, 距離空間上での Musielak-Orlicz-Sobolev 空間における楕円型偏微分方程式の解の存在が示されれば, 次には解の正則性の研究が可能となり, 今後注目を集めていくであろう新たな研究分野の新たな大きな一歩を踏み出すことができるため, 本研究は関連研究分野の進展, 新しい学問分野の開拓等に大きな学術的波及効果が期待される. また, 正確な ER 効果と流れの形態のモデル化, その解の性質の研究が進み, 宇宙開発だけではなく, プレーキ, クラッチなどの応用デバイス開発, または, 次世代フルードパワーシステムとして多くの分野で実用化・製品化されることが期待でき, 社会貢献に大きなものが期待される.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計9件)以下の論文はすべて査読有です.

- (1) Daiki Hashimoto, [Takao Ohno](#) and Tetsu Shimomura, Boundedness of generalized fractional integral operators on Orlicz spaces near L^1 over metric measure spaces, Czechoslovak Math. J. **69** (144) (2019), no. 1, 207 ~ 223. DOI 10.21136/CMJ.2018.0258-17
- (2) Fumi-Yuki Maeda, [Takao Ohno](#) and Tetsu Shimomura, Obstacle problem for Musielak-Orlicz Dirichlet energy integral on metric measure spaces, Tohoku Math. J. (2) **71** (2019), no. 1, 53 ~ 68.
- (3) [Takao Ohno](#) and Tetsu Shimomura, Maximal and Riesz potential operators on Musielak-Orlicz spaces over metric measure spaces,

Integral Equations Operator Theory **90** (2018), no. 6, Art. 62, 18 pp.

DOI 10.1007/s00020-018-2484-0

(4) Takao Ohno and Tetsu Shimomura,

Sobolev's inequality for Riesz potentials of functions in grand Musielak-Orlicz-Morrey spaces over nondoubling metric measure spaces,

Math. Nachr. **291** (2018), no. 10, 1547 ~ 1562.

DOI 10.1002/mana.201700019

(5) Takao Ohno and Tetsu Shimomura,

Boundary limits of monotone Sobolev functions in Musielak-Orlicz spaces on uniform domains in a metric space,

Kyoto J. Math. **57** (2017), no. 1, 147 ~ 164.

DOI 10.1215/21562261-3759549

(6) Sachihiro Kanemori, Takao Ohno and Tetsu Shimomura,

Trudinger's inequality and continuity for Riesz potential of functions in Orlicz spaces of two variable exponents over non-doubling measure spaces,

Kyoto J. Math. **57** (2017), no. 1, 79 ~ 96.

DOI 10.1215/21562261-3759522

(7) Takao Ohno and Tetsu Shimomura,

Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on non-homogeneous central Musielak-Orlicz-Morrey spaces,

Mediterr. J. Math. **13** (2016), no. 5, 3341 ~ 3357.

DOI 10.1007/s00009-016-0689-5

(8) Takao Ohno and Tetsu Shimomura,

Trudinger's inequality and continuity for Riesz potentials of functions in grand Musielak-Orlicz-Morrey spaces over non-doubling metric measure spaces,

Kyoto J. Math. **56** (2016), no. 3, 633 ~ 653.

(9) Takao Ohno and Tetsu Shimomura,

Musielak-Orlicz-Sobolev spaces with zero boundary values on metric measure spaces, Czech. Math. J. **66** (2016), no. 2, 371 ~ 394.

DOI 10.1007/s10587-016-0262-1

〔学会発表〕(計1件)

大野貴雄, 「Sobolev's inequalities on non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces」

日本数学会, 2016年

〔その他〕

大分大学教育学部教育研究所 (<http://www.ed.oita-u.ac.jp/kykenkyu/>)

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。