

令和 2 年 4 月 26 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17621

研究課題名(和文) 離散と連続をつなぐ粘性解理論の構築

研究課題名(英文) Construction of the viscosity solution theory connecting continuous problems and discrete problems

研究代表者

浜向 直 (Hamamuki, Nao)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：70749754

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、主に界面運動を記述する非線形偏微分方程式を対象に、連続問題と離散問題をつなぐ粘性解理論を構築することで、相互の問題の理解を深めることを目標とした。代表的に、次の二つの課題に取り組んだ。  
一つ目は、等高面方程式の修正である。離散レベルでの等高面の計算がより効率的となるように、従来の等高面方程式を改良した。  
二つ目は、動的境界値問題に対する粘性解理論の確立と離散化である。粘性解の一意存在性を証明し、決定論的離散ゲーム解釈を与えた。さらに離散ゲームを応用して、解の漸近挙動や幾何的性質を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

身の回りの現象の時間変化を予測することは、自然科学全体に横たわる課題であり、社会生活にも深く関わる。本研究で得られた成果は、特に界面の形状の予測と理解を可能にするものである。数学理論を実用する際は、離散問題を設定し、計算機で近似解を求めることになる。この実装のための適切な離散化と効率的な計算法を、本研究で提案できた。様々な初期値・境界値問題の数学的基礎を確立したことは、粘性解理論そのものの進展でもある。

研究成果の概要(英文)：The goal of this research is to get a deeper understanding of continuous problems and discrete problems for nonlinear partial differential equations, especially surface evolution equations, by means of construction of the viscosity solution theory connecting both the problems. Typically, I studied the following two topics:  
The first topic is improvement of level set equations. I modified classical level set equations so that it enables us to compute the level sets effectively in a discrete level.  
The second topic is establishment and discretization of the viscosity solution theory for dynamic boundary value problems. I proved unique existence of viscosity solutions and gave deterministic discrete game-theoretic interpretations. Furthermore, applying the discrete game, I studied asymptotic behavior and geometric properties of solutions.

研究分野：数学

キーワード：粘性解 等高面法 動的境界値問題 決定論的ゲーム 比較定理 平均曲率流方程式 ハミルトン・ヤコビ方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 1. 研究開始当初の背景

広いクラスの2階非線形偏微分方程式に対して、弱解の概念の一つである粘性解の適切性が知られている。そして、そのような連続問題の一意解を、離散問題の解で近似することは基本的な問題であり、計算機で数値的に解を求める際の実用上の観点からも重要である。実際、いくつかの場合には離散問題が提案され、解の収束が示されている。しかしながら、収束以上の性質はあまり明らかになっておらず、連続と離散の二つの問題において、一方の問題を理解するために他方の問題が十分に役に立っているとは言えない。また方程式によっては、離散問題に実用上の課題が残されている。

そこで本研究で、これまでばらばらに発展していた連続問題と離散問題の二つをつなぐ粘性解理論を構築し、より実用的な数学理論を確立したり、解の諸性質を導いたりすることを通して、相互の問題の理解を深めようと考えた。

## 2. 研究の目的

時間発展型の偏微分方程式、とりわけ、結晶成長現象に現れる界面(物質間の境目として現れる曲面)の運動を記述する方程式を対象とする。この偏微分方程式の初期値問題である連続問題と、それを離散化した問題について、次のことを目標にして研究した。

(1) 計算機による界面の効率的な計算を実現する、離散化に適した連続問題の導入

(2) 境界条件付きの連続問題の適切な離散化、および離散問題の解析を通じた連続問題の解の諸性質の導出

上記(1)の課題では、界面への符号付き距離関数を基にした等高面方程式の修正を試みた。また(2)では動的境界値問題を考察した。連続問題の粘性解の意味での適切性を、離散化の問題と同時に研究した。

## 3. 研究の方法

今回の研究で鍵になる、符号付き距離関数や動的境界値問題についての技術面に関する情報収集のため、資料収集をしたり、関連研究者を訪問・招聘したりした。また共同研究者を訪問し、打ち合わせを行った。

情報収集と成果発表のため、国内外の研究集会へ参加した。粘性解に関する専門性の高い研究集会から、総合的研究集会まで、様々な解析手法の情報を得るため参加した。さらに本研究の動機となる結晶成長問題に関する情報を収集するため、結晶成長の専門家が参加する研究集会にも参加した。

## 4. 研究成果

### (1) 修正等高面方程式の提案

界面の運動を数学的に追跡する手法として、等高面法が知られる。これは、界面を補助関数のゼロ等高面として表示し、その補助関数に対する等高面方程式を解くことで、界面運動を求める方法である。しかし、方程式を離散化し、計算機で解を求めてゼロ等高面を取り出す際、解の傾きが極端に大きかったり小さかったりすると、等高面を正確に取り出せないという問題があった。そこで本研究では、従来の等高面方程式を修正し、解の傾きが適切に保たれる修正等高面方程式を提案した。

具体的には、界面への符号付き距離関数が界面付近で満たす時間発展型方程式に、テイラー近似を適用することで修正等高面方程式を導いた。そして、この修正方程式の初期値問題の解の傾きが時間大域的に1に近いことを、符号付き距離関数を修正して得られる、傾きが1に近い劣解と優解を構成することで示した。さらに、実際にゼロ等高面がぼやけないことを数値的に確かめた。

数値計算で用いられる再初期化のアイデアに基づく修正等高面方程式についても考えた。この修正方程式は、E. Ntovoris氏との共同研究で導入したもので、元の等高面方程式に、パラメータ付きの修正項を加えることで得られる。修正項には、距離関数が満たすアイコナル方程式が利用されている。パラメータの極限を取ると、修正方程式の解が、符号付き距離関数に収束する。しかしながら、この結果は緩和極限を用いる議論で示されていたため、その収束レートは明らかになっていなかった。そこで距離関数を基に適当なバリア関数を構成することで、収束レートに関する評価を本研究で得ることができた。

本研究の成果は、論文 [Hamamuki, Appl. Anal., 2019] で発表した。

なお本研究では、元の等高面方程式が1階のハミルトン・ヤコビ方程式で与えられる場合を扱った。今回の手法を応用し、特異性を持つような2階方程式へ結果を拡張することは、今後の課題・展望の一つである。

## (2) 動的境界値問題の粘性解の適切性、および決定論的離散ゲーム解釈と応用

初期値・境界値問題であって、境界条件が未知関数の時間微分に依存する動的境界値問題を研究した。連続問題の適切性、そして離散ゲームを用いた解の近似と収束、その応用を調べた。

### 特異な方程式に対する動的境界値問題の粘性解の一意存在

平均曲率流の等高面方程式を典型例に、特異性をもつ退化放物型方程式の動的境界値問題の粘性解の一意存在、特に一意性を導くための比較定理について研究した。方程式に特異性が無い場合は Barles(1993, 1999)が比較定理を確立しているが、同じ手法を、特異性のある方程式には適用できない。本研究において、試験関数にある種のパラメータを加えて摂動させる平坦化法が有効であることを発見し、特異な方程式の半連続粘性解に対する比較定理を、領域が半空間の場合に証明した。またペロンの方法で構成される一意解のリプシッツ正則性を、初期値が十分滑らかな場合に証明した。動的境界条件の法線微分の係数に関する極限を取ったとき、解が、良く知られたディリクレ境界値問題やノイマン境界値問題の解へと収束することも明らかにした。

本研究は東京大学の儀我美一氏との共同研究で、成果は、論文 [Giga-Hamamuki, 2018, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.] で発表した

### 退化した動的境界条件の下での粘性解の一意存在

Barles(1993, 1999)により示された粘性解の一意存在性は、動的境界条件が、未知関数の法線方向微分について単調な、非退化な場合の結果である。本研究では、この条件を外した、退化した動的境界値問題の粘性解の一意存在性を調べた。典型例としては、未知関数の時間微分を指定する「定常境界条件」を考えており、このような境界条件は結晶成長現象においても自然に現れる。

境界において適当な意味で連続な解に対する比較定理を、畳み込みによる正則化を用いる方法で、領域が平らな場合に証明した。また定常境界値問題とディリクレ境界値問題との関係を調べ、各々の一意解が一致するための十分条件や、一致しない例を与えた。

本研究の成果は、論文 [Hamamuki, 2020, 投稿中] で発表した。

なお と の結果は、領域境界が平らな場合に得られたものであるため、今後の展望として、今回の手法を基に領域の形状を一般化することを見据えている。

### 動的境界値問題の離散ゲーム解釈と応用

Kohn-Serfaty(2006, 2010)が確立した、決定的離散ゲーム解釈に基づく2階偏微分方程式の粘性解の表現公式を、動的境界値問題へも拡張できるかについて研究した。このゲーム解釈は、全空間の問題、あるいはノイマン境界値問題の場合には知られていたものである。非特異な完全非線形退化放物型方程式、そして特異性を持つ曲率流方程式の両方の場合において、ゲームのルールに領域境界での適当な反射を加えることで、動的境界条件を満たす初期値問題の粘性解が、ゲームの値関数の極限として得られることを明らかにした。

さらに解の漸近挙動や幾何的性質も調べた。完全非線形放物型方程式の場合は、時間変数のスケール変換極限を取ることで、対応する楕円型方程式の粘性解に収束することを示した。曲率流方程式の場合は、離散ゲームの戦略を調べることで、領域境界から界面の肥大化が起きる例を構成した。また界面の凸性保存を導いた。

本研究は福岡大学の柳青氏との共同研究で、成果は、論文 [Hamamuki-Liu, 2020, ESAIM Control Optim. Calc. Var.], [Hamamuki-Liu, 2020, 投稿中] で発表した。

## (3) 病的関数を初期値とするハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の挙動

病的関数(至る所連続かつ至る所微分不可能な関数)の代表例の一つである高木関数を初期値とするハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解が、瞬間的に、離散的な点でのみ下限を取る下限畳み込みで表されるといって顕著な幾何的性質を持つことに動機を得て、そのような幾何的性質を導く初期関数のクラスを、離散的2階差分を用いて特徴付けた。結果的に、そのような性質を導く初期関数は病的関数に限ることが明らかになった。また周期的凹関数を用いた級数で、このような病的関数が得られることも分かった。病的関数の一部のクラスに、ハミルトン・ヤコビ方程式と離散的差分を通した新たな見方を与えたと言える。

特に高木関数を初期値とした場合は、実数の2進展開に現れる係数を用いて、解を具体的に表示できる。これを応用し、高木関数自身が持つある種の自己アフィン構造が、解に、時間遅れを伴う自己アフィン構造として遺伝されることを証明した。また、初期値問題の一般化された特性曲線を全て求めた。これにより、初期時刻からの特異点伝播の様子が明らかになった。

本研究は富山大学の藤田安啓氏・山口範和氏、ローマ・ラ・サピエンツァ大学の Antonio Siconolfi 氏との共同研究で、成果は、論文 [Fujita-Hamamuki-Siconolfi-Yamaguchi, 2020, Acta Math. Hungar.], [Fujita-Hamamuki-Yamaguchi, 2020, Michigan Math. J. に掲載確定], [Fujita-Hamamuki-Yamaguchi, 2020, 投稿中] で発表した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Nao Hamamuki	4. 巻 98
2. 論文標題 An improvement of level set equations via approximation of a distance function	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applicable Analysis	6. 最初と最後の頁 1901-1915
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00036811.2018.1484911	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Fujita, Nao Hamamuki, Antonio Siconolfi, Norikazu Yamaguchi	4. 巻 160
2. 論文標題 A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	6. 最初と最後の頁 343-359
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3">https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nao Hamamuki, Qing Liu	4. 巻 26
2. 論文標題 A deterministic game interpretation for fully nonlinear parabolic equations with dynamic boundary conditions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations	6. 最初と最後の頁 1-42
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1051/cocv/2019076">https://doi.org/10.1051/cocv/2019076</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiro Fujita, Nao Hamamuki, Norikazu Yamaguchi	4. 巻 -
2. 論文標題 A self-affine property of evolutionary type appearing in a Hamilton-Jacobi flow starting from the Takagi function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） -	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshikazu Giga, Nao Hamamuki	4. 巻 25
2. 論文標題 On a dynamic boundary condition for singular degenerate parabolic equations in a half space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 NoDEA. Nonlinear Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 1--39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s00030-018-0542-6">https://doi.org/10.1007/s00030-018-0542-6</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nao Hamamuki, Eleftherios Ntovoris	4. 巻 18
2. 論文標題 A rigorous setting for the reinitialization of first order level set equations	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Interfaces and Free Boundaries	6. 最初と最後の頁 579--621
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/IFB/374	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計26件 (うち招待講演 23件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 A comparison principle for viscosity solutions of a boundary value problem without the normal derivative
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms
3. 学会等名 9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics - ICIAM 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤田 安啓, 浜向 直, 山口 範和
2. 発表標題 Hamilton-Jacobi方程式に現れる時間発展型のself-affine性
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 On large time behavior of some crystal growth problems
3. 学会等名 表面・界面ダイナミクスの数理18 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 Two-dimensional nucleation in crystal growth and large time behavior of solutions
3. 学会等名 第37回九州における偏微分方程式研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 On a dynamic boundary value problem of the level-set mean curvature flow equation
3. 学会等名 Advanced Developments for Surface and Interface Dynamics - Analysis and Computation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 不連続外力項を持つ曲率流方程式の粘性解について
3. 学会等名 第一回はこたて数理解析研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms
3. 学会等名 微分方程式と逆問題をめぐって (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 A comparison principle for singular degenerate parabolic equations under some dynamic boundary conditions
3. 学会等名 5th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 On surface evolutions under some dynamic boundary conditions
3. 学会等名 Nonlinear PDE for Future Applications -Optimal Control and PDE- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 均質化問題と粘性解理論
3. 学会等名 日本応用数理学会2017年度年会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 界面発展方程式の動的境界値問題について
3. 学会等名 応用数学に関する勉強会 (応用数学セミナー) @芝浦工大 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 On viscosity solutions in metric spaces
3. 学会等名 離散幾何構造セミナー (北海道大学) (招待講演)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 On a dynamic boundary condition for singular degenerate parabolic equations
3. 学会等名 解析セミナー（神戸大学）（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 A discrete game interpretation for a dynamic boundary value problem of the mean curvature flow equation
3. 学会等名 偏微分方程式セミナー（北海道大学）（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 A discrete game interpretation for a dynamic boundary value problem of the mean curvature flow equation
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 藤田安啓, 浜向直, Antonio Siconolfi, 山口範和
2. 発表標題 病的函数を初期値とするHamilton-Jacobi flowについて
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浜向直, 儀我美一
2. 発表標題 On a dynamic boundary condition for singular degenerate parabolic equations in a half space
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 A discrete isoperimetric inequality on lattices
3. 学会等名 Hamilton-Jacobi Equations:New trends and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 On cell problems for Hamilton-Jacobi equations with non-coercive Hamiltonians and its application to homogenization problems
3. 学会等名 The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 Harnack inequalities for supersolutions of fully nonlinear elliptic difference equations
3. 学会等名 Towards regularity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 Two approaches to an approximation of a distance function to moving interfaces
3. 学会等名 Emerging Developments in Interfaces and Free Boundaries (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Nao Hamamuki
2. 発表標題 Two approaches to an approximation of a distance function to moving interfaces
3. 学会等名 第18回北東数学解析研究会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 粘性解に対する均質化問題－不連続方程式への拡張とその応用－
3. 学会等名 非線形現象の数値シミュレーションと解析2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 浜向 直
2. 発表標題 不連続な加法的固有値問題に対する粘性解とその応用
3. 学会等名 金沢解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----