

令和 5 年 6 月 9 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2022

課題番号：16K17628

研究課題名(和文)楕円型過剰決定問題の発展方程式的解析

研究課題名(英文)Dynamical analysis of elliptic overdetermined problems

研究代表者

小野寺 有紹 (Onodera, Michiaki)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：70614999

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究ではBernoulliの自由境界問題、Serrinの問題を含む一般の過剰決定問題に対する解(未知領域)の存在・一意性や、境界条件の摂動に対する領域形状の定量的安定性を導出する統一的分析手法を確立した。特に、従来特別な場合にのみ与えられていた楕円型・双曲型という解の分類を一般の過剰決定問題に拡張し、それらの経験的分类が発展方程式の観点で非常に明快な理解を与えることを示した。すなわち、従来の単に最大値原理との相性の良さ・悪さという観点だけでなく、ある解が楕円型・双曲型であることは、その解の周辺から初期値を選ぶ場合に対応する発展方程式が放物型か逆放物型であることに対応することを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究結果である過剰決定問題の解の分類およびその発展方程式論的解析は、過去の研究に新たな視点を与えるもので、従来各論的に取り扱われてきた過剰決定問題を統一的に解析する手法を与えるものである。これらは研究が盛んな自由境界問題や形状最適化問題などの領域形状に関する変分問題における未解決問題(例：Flucher-Rumpf予想、Schiffer予想)の解決に向けても有効な手段を与えるものと期待される。

研究成果の概要(英文)：This research established a unified functional analytic method of deriving the existence, uniqueness and quantitative stability estimates of solutions (unknown domains) of general overdetermined problems including Bernoulli's free boundary problem and Serrin's problem as special cases. In particular, a classification of solutions, previously known for some special cases, are extended to general overdetermined problems. More importantly, this research clarifies a deep connection between the classification and qualitative behavior of solutions in terms of related evolution equations. Namely, it turns out that the ellipticity (resp. hyperbolicity) of a solution corresponds to the parabolic (reversed parabolic) character of the evolution equation.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：過剰決定問題 自由境界問題 発展方程式 陰関数定理

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究課題である楕円型過剰決定問題とは、境界条件が過剰に与えられた楕円型方程式の境界値問題であり、一般の領域では解が存在せず、特別な領域でのみ可解となるようなものである。例えば、古典的なディリクレ問題(領域内部において課される楕円型方程式にディリクレ境界条件を与えた境界値問題)に付加的にノイマン境界条件を与えた問題である。そこで、可解性をもつ特別な領域の存在・一意性およびその形状が興味の対象となる。

(2) 過剰決定問題は、氷の融解現象を記述する Stefan 問題や最適投資問題、微分幾何学における曲面決定問題などを含む、領域自身が未知である自由境界問題の典型例の一つである。特に、形状最適化問題とよばれる領域を独立変数とする変分問題のオイラー・ラグランジュ方程式として現れる。具体例としては、弾性体のねじり剛性の最大化問題やラプラシアン第 k 固有値の最小化問題が挙げられる。

(3) 過剰決定問題が解をもつような領域を可解領域とよぶとき、方程式に対する適当な対称性の仮定の下で可解領域もまた球対称領域に限るか否かという対称性の問題は 1970 年代の Serrin の研究により飛躍的に進展した。Serrin が導入した移動平面法は、以後現在に至るまで過剰決定問題の可解領域の対称性やその安定性の解析において基本的な役割を担っている。また、Weinberger による積分恒等式を用いた対称性の別証は、適用範囲が特別な方程式に限るものの、証明が非常に簡便であるだけでなく、近年の安定性の研究でより良い評価を与えている。

(4) 対称性が期待できない一般の過剰決定問題に対する可解領域の存在や一意性、安定性に関する一般論は構築されておらず、それぞれの問題に応じてその変分構造や最大値原理の考察が行われてきた。また、方程式の摂動に対する可解領域形状の安定性の問題は近年盛んに研究されているが、それも各方程式の性質に依存する解析が主であった。

2. 研究の目的

(1) 本研究課題の目的は、楕円型過剰決定問題に対して線型化解析による統一的解析手法を構築し、その線型構造によってそれぞれの過剰決定問題の特性を明らかにすることである。特に、本研究では Bernoulli の自由境界問題を中心とした過剰決定問題に対して、可解領域の分類や存在・一意性定理を導出することが目標である。

(2) 特に、流体力学の逆問題や形状最適化問題として現れる古典的問題である Bernoulli の自由境界問題は、「楕円型解」と呼ばれる変分構造の観点からは安定な可解領域と「双曲型解」と呼ばれる不安定な可解領域が存在する自由境界問題である。しかし、従来の典型的な非線型解析手法である優解劣解法や変分法等では楕円型解しか構成されず、数学的解析が困難である双曲型解の構成およびその定性的性質の解明が待たれている。特に、1997 年に提出された双曲型解の集中現象を主張する Flucher-Rumpf 予想は部分的にも未解決な難問である。本研究の主目的は Bernoulli 問題の双曲型解の構成およびその集中現象の解明である。

3. 研究の方法

(1) 不安定な双曲型解に対しても原理的に有効な線型化解析を発展させ、過剰決定問題を含む自由境界問題において典型的に現れる正則性損失構造の問題に対しても有効な手法を確立し、その応用として楕円型解・双曲型解の両方を統一的な方法により構成する。

(2) 過剰決定問題を通常の境界値問題と付加的境界条件とに分離したとき、各領域において前者は一意解をもつ。したがって、過剰決定問題の可解領域を求める問題は、通常の境界値問題の一意解が付加的境界条件をみたすような領域を定める問題として定式化される。適当な固定閉曲面からの摂動で得られる閉曲面は固定曲面上で定義される関数によって表示されることに注意すれば、可解領域を求める問題は適当な函数空間の間の非線型写像の零点を求める問題として定めることができる。

(3) 径数を含む滑らかな非線型写像の零点を求める問題において、ある径数に対する写像の零点をあらかじめ知っている場合は、その線型化写像の非退化性(全単射性)を示すことで、径数を微小変化させた写像に対する零点の存在も導かれる。この陰函数定理は、非退化性のみを論拠に安定解だけでなく不安定解も構成できる基本的方法であるが、考える非線型写像が「微分の損失」と呼ばれる正則性損失構造をもつ場合は適用できない。過剰決定問題は同構造から古典的陰函

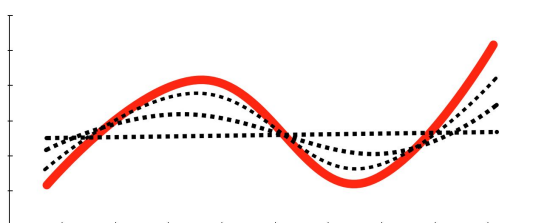
数定理の適用が困難なため、径数を時刻とみなして変化する非線型写像の零点の挙動を発展方程式の解と解釈し、それを最大正則性理論によって追跡する解析手法を用いる。

4. 研究成果

(1) Bernoulli の自由境界問題の双曲型解の構成

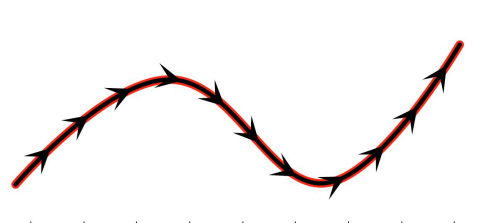
古典的陰函数定理が適用不能な Bernoulli の自由境界問題に対して、抽象発展方程式の理論を基礎とする「放物型陰函数定理」を確立した。これは本研究代表者が求積公式に付随する過剰決定問題に対して導入した発展方程式的解析を、径数付き非線型写像の零点を求める一般的問題に対するものへと昇華したものであり、Bernoulli の自由境界問題を含む一般の過剰決定問題へと応用可能である。この一つの帰結として、従来の解析手法では得られていなかった双曲型解を構成することに成功した。図1および2は、横軸で問題がもつ径数が動く実数空間を、縦軸で領域をその中の点として表す函数空間を表現する概念図である。各径数に対応する可解領域を繋げてできる解曲線（太線）を得るために、古典的陰函数定理の証明の基礎となる逐次近似法では、図1のように近似解曲線（点線）を線型化によって徐々に修正しその極限として真の解曲線を得る。しかし、過剰決定問題では正則性損失によって近似解が同じ空間内に留まらずこの方法は破綻する。一方、放物型陰函数定理は図2のように解曲線（太線）自体を時間発展方程式の解軌道として特徴付け、その発展方程式を解くことで解曲線を得る。これを応用し、双曲型解が既知である問題（左端点）を適当な径数によって未知の問題（右端点）へと繋げ、放物型陰函数定理で現れる発展方程式を解いて未知の不安定解を構成した。

図1



従来の構成（逐次近似法）

図2



発展方程式構成

(2) Serrin の過剰決定問題における最良安定性評価

ねじり剛性の最大化問題のオイラー・ラグランジュ方程式として現れる典型的過剰決定問題である Serrin の問題は、与えられる境界条件が定数である場合には可解領域が球に限ることが知られている。近年、国内外の研究者によって、その球対称性の境界条件の摂動に対する定量的安定性評価が様々な方法により導出されている。安定性評価の導出に対して線型化解析を基礎とする陰函数定理は有効であり、摂動と可解領域の形状の対応関係の第一近似である線型関係を精密に評価できることが期待される。しかしながら、前述の正則性損失構造により古典的陰函数定理は適用不能である。本研究では学振外国人特別研究員であった Alexandra Gilsbach 氏と共同で、球からの微小摂動領域の考察に対して有効な修正陰函数定理を導出し、先行研究では得られていなかった高次元に対する最良評価を与えることに成功した。なお、この研究においても放物型陰函数定理は有効であるが、その適用には高階の微分の情報を要する他、Serrin の問題は問題の平行移動不変性から線型化写像が有限次元の退化性をもつことから、本研究では逐次近似法を発展させた修正陰函数定理を用いた。

(3) 一般の過剰決定問題の可解領域の分類と構成

Bernoulli の自由境界問題や Serrin の問題を含む一般の過剰決定問題に対する統一的解析手法として放物型陰函数定理の基礎理論を構築した。特に、従来 Bernoulli の自由境界問題にのみ与えられていた楕円型解・双曲型解という可解領域の分類を一般の過剰決定問題に拡張し、それらの経験的 분류が発展方程式の観点からは非常に明かな理解を与えることを示した。すなわち、従来の単に最大値原理との相性の良さ・悪さという観点だけでなく、ある可解領域が楕円型・双曲型であることは、その可解領域の周辺から初期値を選ぶ場合に対応する発展方程式が放物型か逆放物型であることに対応することを明らかにした。特に、その帰結として、先行研究で部分的に考察されていた、方程式や境界条件に球対称非定数函数を課した一般化 Serrin の問題の解析を完結させ、非常に簡明な理論としてまとめ挙げた。

以上の研究成果は、国際研究雑誌に掲載され、国内外の研究集会においても発表している。また、日本語専門雑誌である日本数学会「数学」の論説として、放物型陰函数定理の記事を執筆し公開した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yuya Okamoto, Michiaki Onodera	4. 巻 301
2. 論文標題 Stability analysis of an overdetermined fourth order boundary value problem via an integral identity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 97~111
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2021.08.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Alexandra Gilsbach, Michiaki Onodera	4. 巻 60
2. 論文標題 Linear stability estimates for Serrin's problem via a modified implicit function theorem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-021-02107-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Toru Kan, Rolando Magnanini, Michiaki Onodera	4. 巻 29
2. 論文標題 Backus problem in geophysics: a resolution near the dipole in fractional Sobolev spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-022-00749-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Antoine Henrot, Michiaki Onodera	4. 巻 240
2. 論文標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Archive for Rational Mechanics and Analysis	6. 最初と最後の頁 761-784
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00205-021-01620-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ryo Ikehata, Michiaki Onodera	4. 巻 30
2. 論文標題 Remarks on the large time behavior of the L^2 -norm of solutions to strongly damped wave equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Differential Integral Equations	6. 最初と最後の頁 505-520
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.57262/die/1493863392	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Michiaki Onodera	4. 巻 106
2. 論文標題 Dynamical approach to an overdetermined problem in potential theory	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Math. Pures Appl.	6. 最初と最後の頁 768-796
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2016.03.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計28件 (うち招待講演 28件 / うち国際学会 22件)

1. 発表者名 小野寺有紹
2. 発表標題 Bernoulliの自由境界問題の解の葉層構造
3. 学会等名 One-day workshop on Applied and Computational Complex Analysis (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小野寺有紹
2. 発表標題 Parabolic structures in overdetermined problems
3. 学会等名 楕円型・放物型微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 6th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 RIMS Conference on "Viscosity solution approach to asymptotic problems in front propagation, dynamical system and related topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 12th ISAAC Congress, Session 10: Geometric & Regularity Properties of Solutions to Elliptic and Parabolic PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会函数方程式分科会 (特別講演) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Foliated hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 The 2nd Taiwan-Japan Joint Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Foliated solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Geometric Analysis and General Relativity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Dynamical approach to an overdetermined problem
3. 学会等名 PDE & Analysis Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Seminar on Calculus of Variations & Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Analysis Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Workshop on Nonlinear Parabolic PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Geometric PDEs in Freiburg 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 The 43rd Sapporo Symposium on Partial differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Dynamical approach to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Ito Workshop on Partial Differential Equations --- KYUSHU UNIV -- POSTECH -- SJTU Joint Workshop on PDEs and Related Topics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Dynamical approach to an overdetermined problem
3. 学会等名 Tokyo Tech -- Uppsala University 5th Joint Symposium (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Foliations in Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 第61回函数論シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Dynamical approach to an overdetermined problem in potential theory
3. 学会等名 INS Colloquia at Shanghai Jiao Tong University (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Foliations in Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 AIMR Workshop on Pure and Applied Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Bernoulliの自由境界問題の極限解について
3. 学会等名 水戸数学・情報数理研究会2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Ito Workshop on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Flow approach to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 第64回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Dynamical approach to an overdetermined problem
3. 学会等名 Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 The third Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Uppsala University - Tokyo Tech Joint Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Hyperbolic solutions to Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 Seminaire d'Equations aux Derivees Partielles et Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 On the solution structure of Bernoulli's free boundary problem
3. 学会等名 The 9th Nagoya Workshop on Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michiaki Onodera
2. 発表標題 Dynamical approach to an overdetermined problem
3. 学会等名 Korea-Japan International Workshop of Nonlinear Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	University of Florence			
フランス	Institut Elie Cartan			