

令和元年6月19日現在

機関番号：24201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17631

研究課題名(和文)退化型準線形波動方程式の解の挙動の分類

研究課題名(英文)Classification of the behavior of solutions to degenerate quasi-linear wave equations

研究代表者

杉山 裕介(Sugiyama, Yuusuke)

滋賀県立大学・工学部・准教授

研究者番号：30712161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：弾性体の密度波を記述するelastic systemと呼ばれる偏微分方程式に対して、初期値に応じて解の挙動の分類を行った。解の挙動は、大まかに、時間大域的、衝撃波、有限時間での方程式の退化という3種類のわけることができる。有限時間で衝撃波が起こるための条件は、すでに多くの研究成果があったが、方程式の退化は研究例がなかった。関連する物理的に重要な方程式について、方程式の退化が起こるための条件を与え、elastic systemについて、方程式の退化が起こるか否かをわける初期速度の積分量の閾値を与えた。さらに、杭州師範大学のYun-guang Lu教授とともに、時間大域的弱解の存在の研究も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

双曲型保存則系は、非常に単純な偏微分方程式であるが故にその研究の歴史は古く、それにもかかわらず空間1次元の場合でさえも、現在に至るまで多くの未解決問題を残している。また、気体、弾性体、行きかう車両の渋滞現象などさまざまな物の流れを記述することができ、数学的や物理的だけでなく工学的、社会的にも重要な研究対象である。この研究では、双曲型保存則系における新しい解の特異性である「方程式の退化」の解析を行った。退化が起こるための条件に波の速度の積分量という保存量が現れることを発見した。

研究成果の概要(英文)：We classify the behavior of solutions to elastic system which describes the density wave in elastic body. The behavior of this equation can be classified as the global existence, shock wave, the degeneracy of equation in finite time. The occurrence of the shock wave has been studied by many papers. However there are few works on the degeneracy. We give sufficient conditions for physically important and related equations including p-system and also obtain a threshold of integral of initial velocity separating the occurrence and nonoccurrence of the degeneracy of the equation. Furthermore, in a joint work with Professor Yun-guang Lu in Hangzhou normal university, we construct a global weak solution to degenerate quasi-linear wave equations.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：準線形波動方程式 方程式の退化 解の爆発 衝撃波 希薄波 双曲型保存則系 elastic system 弾性体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

既存の準線形波動方程式の研究では、退化しない方程式を扱ったものがほとんどであった。そこで本研究では、研究例の少ない「方程式の退化」が起こり得る退化型準線形波動方程式を扱うこととした。「方程式の退化」とは、主要部の係数が未知関数に依存するような準線形波動方程式において、未知関数が大きく動き、波動方程式としての構造を崩す現象である。基礎的な問題である、退化が起こるための条件や可解性すらも未解決であった。

2. 研究の目的

準線形波動方程式の初期値問題の解の長時間挙動を初期値に応じた分類を行うことを目標にした。本研究では、弾性体方程式と呼ばれる 2×2 双曲型保存則系で書けるモデルを扱い、その後、弾性体の現象解析を意識した一般化を行うことを目指していた。さらには、盛んな準線形波動方程式や双曲型保存則系の研究において「方程式の退化」という新領域を開拓することで、偏微分方程式の研究への貢献を目指した。

3. 研究の方法

準線形波動方程式で最も基礎的とも言える空間 1 次元双曲型保存則系の解の挙動の分類から研究を開始した。その後、退化後の解の延長及び時間大域可解性について研究を行うため、弱解の枠組みを考察することを目指した。そして、これらの結果と関連するその他の物理的に重要な方程式へと一般化、延長することを目指した。

4. 研究成果

1. 空間 1 次元準線形波動方程式のコーシー問題に対して解の挙動の分類を行った。 2×2 双曲型保存則系で書ける弾塑性材内の密度波を記述するモデルについては、有限時間における「方程式の退化」が起こるための十分条件を与えた。時刻 0 でのリーマン不変量の単調減少性を仮定した場合、初期速度の積分量に対して、有限時間における方程式の退化が起こるか否かを分ける閾値を決定した。この結果は、論文として発表した。

2. 時刻 0 でのリーマン不変量の単調減少性が時間発展に伴って伝播しつつ、保存則系の構造を持たないいくつかの方程式に対しても有限時間における「方程式の退化」が起こるための十分条件を与えた。特に保存則系としての構造が崩れたときに上述のような閾値は存在せず、リーマン不変量の単調減少性のみで有限時間での「方程式の退化」が起こるという結果を得た。この結果は、論文として発表した。

3. 変数係数摩擦項付き 1 次元圧縮性オイラーの解に対して有限時間における解の爆発が起こるための十分条件を与えた。摩擦項が時間変数にのみ依存した場合の問題は、いくつかの既存の研究の改良が行った。例えば、リーマン不変量に関する新しい評価を用いることで、初期値の空間無限遠方での挙動に関する仮定を弱めることができ、さらに摩擦項の係数の時間減衰の速さに応じて小さな初期値に対する解の爆発時刻の適切な評価も与えた。摩擦項の係数が時間と空間変数に依存する問題は、これまで全く研究がなかったが、摩擦項の係数の時間または空間減衰がある程度速い場合に摩擦項としての効果が弱まり、初期値が小さくても解の爆発が起こることが分かった。この結果は、論文として発表した。

4. 中国の杭州師範大学の Yunguang Lu 教授とともに退化する空間 1 次元準線形波動方程式の時間大域的な弱解の存在を、時刻 0 におけるリーマン不変量の単調減少性を仮定して、証明することができた。証明は、この分野ではよく知られた Compensated Compactness Method を使う。さらに、有限時間における方程式の退化についても、特性曲線の方法が機能しないような滑らかでない解に対して使うことができる方法を見つけ、これまでの結果の拡張を行った。この結果は論文として発表した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 7 件)

山本征法, 杉山裕介, Spatial-decay of solutions to the quasi-geostrophic equation with the critical and the supercritical dissipation, *Nonlinearity* (2019), Vol. 32, 2467-2480.

Yun-guang Lu, 杉山裕介, Existence and nonexistence the for global weak solutions to quasilinear wave equations for the elasticity, *Applied Mathematics Letters* (2018), Vol. 84, 118-123.

杉山裕介, Singularity formation for the 1D compressible Euler equations with variable damping coefficient, *Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications* (2018), Vol. 170, 70-87.

杉山裕介, Degeneracy in finite time of 1D quasilinear wave equations II, *Evolution Equations and Control Theory* (2018), Vol.6, 615-628.

杉山裕介, Large time behavior of solutions to 1D quasilinear wave equations, *RIMS Kokyuroku Bessatsu* (2017), B63, 113-123.

山本征法, 杉山裕介, Asymptotic expansion of solutions to the drift-diffusion equation with fractional dissipation, *Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications*, (2016), Vol. 141, 57-87.

杉山裕介, Degeneracy in finite time of 1D quasilinear wave equations, *SIAM Journal on mathematical analysis* (2016), Vol. 48, 847-870.

[学会発表](計 20 件)

発表者は、全て杉山裕介。招待講演一部のみ記載。

Degeneracy in finite time of 1D quasilinear wave equations, 2016年10月19日(Workshop on Partial Differential Equations, 杭州師範大学)。

Blow-up and lifespan for the 1D Euler equation with time-dependent damping, 2017年2月20日(Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation 2017)。

Blow-up and estimates of the lifespan of solutions to the 1D compressible Euler equation with variable damping coefficient, 2017年7月25日(Nonlinear Partial Differential Equations for Future Applications Session of “Hyperbolic and Dispersive PDE)。

Singularity formation for the 1D compressible Euler equation with variable damping coefficient, 2017年10月4日(The 15th Linear and Nonlinear Waves)。

Existence and nonexistence theorems for global weak solutions to quasilinear wave equations, 2017年10月28日(Okayama Workshop on Partial Differential Equations)。

Degeneracy in finite time for 1D quasilinear wave equations, 2018年1月26日(大阪駅前セミナー)。

Global existence and degeneracy in finite time for 1D quasilinear wave equations 2018年5月24日(東北大学応用数理解析セミナー)。

Global existence and degeneracy in finite time for 1D quasilinear wave equations, 2018年6月8日(大阪大学微分方程式セミナー)。

Large time behavior of solutions to 1D quasilinear wave equations for the elasticity, 2018年6月23日(熊本大学応用解析セミナー)。

Global existence and degeneracy in finite time for 1D quasilinear wave equations, 2018年7月10日(国際研究集会「MSJ-SI」The 11th Mathematical Society of Japan (MSJ) Seasonal Institute (SI) The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations)。

Remark on global existence and large time behavior for the 1D Euler equation with time-dependent damping, 2018年6月25日(第47回南大阪応用数学セミナー)。

分数冪ラプラシアンを持つ移流拡散方程式の可解性や解の長時間挙動を支えるいくつかの評価について, 2018年12月1日(解析学研究セミナー)。

Loss of strict hyperbolicity in finite time for 1D quasilinear wave equations, 2018年12月21日(NLPDE セミナー)。

Existence and stability of stationary solutions to the drift-diffusion equation with the fractional dissipation, 2019年2月19日(RIMS 共同研究「反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動」)。

[図書](計 件)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<https://sites.google.com/view/yuusukesugiyama/home>

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：Yun-guang Lu（杭州師範大学）

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。