

令和元年6月17日現在

機関番号：13701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17632

研究課題名(和文) 静電プラズマ乱流の非線形偏微分方程式の数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis for nonlinear partial differential equations of electrostatic plasma turbulence

研究代表者

近藤 信太郎 (Kondo, Shintaro)

岐阜大学・工学部・准教授

研究者番号：60726371

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：プラズマ中にはさまざまな不安定性があり、特に核融合プラズマの研究においては高温プラズマを真空容器の中に閉じ込めるために不安定性のコントロールが重要である。ドリフト波と呼ばれる波が原因となって生じるドリフト波乱流と帯状流による乱流抑制の研究は重要な課題であるが、その研究で用いられているHasegawa-Wakatani方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式がある。本研究では温度揺らぎを変数に含むように拡張したモデル方程式に対して解の存在定理を証明した。また、Sugama-Hortonモデルと呼ばれる簡約化常微分方程式に対する研究でも成果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

太陽・オーロラ・雷は典型的なプラズマ現象であり、特にオーロラは複雑な動きをするが、プラズマが含む複雑さの一つに乱流と呼ばれる現象がある。これは、地球の大気が乱れた状態になる現象と似ており、プラズマ物理と気象の現象という異なる現象の間に類似の性質が見られる点で興味深い現象である。他方、木星の大気には帯状の流れ(帯状流)が見られるが、これと類似の現象がプラズマにも現れることがわかっている。乱流と帯状流の関係を研究することは、プラズマ物理の重要な研究課題であるが、本研究ではそのような現象を記述する微分方程式に対して数学解析の研究を行った。

研究成果の概要(英文)：There are various instabilities in the plasma, and control of the instabilities is important in the research of confinement of the high temperature plasma in the vacuum vessel. The research on drift wave turbulence caused by drift wave and turbulence control by zonal flow is an important research theme, and Hasegawa-Wakatani equations (the non-linear partial differential equations) are used in such research theme. We proved the existence theorem for the extended Hasegawa-Wakatani equations to include temperature fluctuation as a variable. Furthermore we have obtained mathematical result on Sugama-Horton model (reduced ordinary differential equations).

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：偏微分方程式 常微分方程式 プラズマ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

プラズマ物理のコミュニティの間では、プラズマが乱流状態になりやすい性質をもつ点と、プラズマの周辺部に帯状の流れ(帯状流)がつけられるとプラズマ乱流が抑制されてプラズマの保温性能が向上する(閉じ込め改善)ことが知られている。その様な現象を理論から説得する役割を果たしたものの一つとして Hasegawa-Wakatani 方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式がある。ところが、その様な物理現象に対する知見は数学のコミュニティの間にはあまり認識されていなかった。そこで、数学解析と数値シミュレーションを併用した研究を行い、数学者にも理解しやすい形で研究成果をまとめるという構想を考えるに至った。

2. 研究の目的

プラズマ中には、磁場による異方性のためほぼ 2 次元的な渦運動が起こることが知られているが、その現象を渦度輸送方程式に電流の効果と密度の不均一性の効果を付加した形で定式化したものが Hasegawa-Wakatani 方程式である。Hasegawa-Wakatani 方程式に対してはこれまで多くの研究がなされているが、イオンの温度ゆらぎを未知関数を含む一般化 Hasegawa-Wakatani 方程式に対しては、まだ十分な研究がなされていない。本研究の目的は、一般化 Hasegawa-Wakatani 方程式に対する初期境界値問題に対する時間局所解の一意存在の証明、時間大域解の存在証明を行い解の適切性を明らかにすることと、数値シミュレーションを行い、プラズマ閉じ込め改善状態が起こるパラメータ領域を明らかにすることにある。

3. 研究の方法

数学解析および数値シミュレーションは研究代表者が単独で行った。数値シミュレーションのプログラムは fortran を用いて作成した。Hasegawa-Wakatani 方程式はプラズマ物理のコミュニティでは認知されているものなので、数値シミュレーションを行った先行論文がすでにくつも存在していたため、それらの論文を読むことによってプログラムを作成することができた。しかし、核融合プラズマに関する知見を広めることと、数値シミュレーションに関する専門家からの助言を得るために、不定期で核融合プラズマや数値シミュレーションの専門家と研究討論を重ねた。

4. 研究成果

まずは研究計画通りに研究を進めて以下の研究成果を得た。ただし、数値計算のプログラムの作成に多くの時間がかかり、研究の進捗は遅れてしまった。

(1) イオンの温度ゆらぎを未知関数を含む一般化 Hasegawa-Wakatani 方程式に対して、長方形領域における周期境界値条件の下で時間局所解の一意存在の証明、時間大域解の存在証明を行い解の適切性を明らかにした。また、一般化 Hasegawa-Wakatani 方程式に対する数値シミュレーションも行った。有限差分法を用いて、対流によって保存されるエネルギー・エンストロフィーを精度よく保存させるためには Arakawa Jacobian という計算手法を用いた。得られた研究成果を投稿したところ、雑誌に掲載された〔雑誌論文〕の項目に記載)

当初の研究計画では、境界から熱が流入するような境界条件を考えることによって、上記の研究成果を発展させることを考えていたが、核融合の専門家と研究討論を重ねる中で、エネルギーの入力値をパラメータにもつ Sugama-Horton モデルと呼ばれる常微分方程式モデルが Hasegawa-Wakatani 方程式と類似の方程式系から導出されており、Sugama-Horton モデルが乱流と帯状流のエネルギーのやりとりを記述するモデルであることがわかった。偏微分方程式である Hasegawa-Wakatani 方程式を対象にして境界から熱が流入するような境界条件を考える前に、詳しい解の性質が解析しやすい常微分方程式モデルの Sugama-Horton モデルを解析することが理にかなっていると判断して、Sugama-Horton モデルに対して沼田龍介氏(兵庫県立大学・核融合プラズマの専門家)と共同研究を行い以下の研究成果を得ることができた。研究発表と論文投稿は近日行い、論文が雑誌に掲載され次第〔その他〕に記載したホームページに記載する予定である。

(2) 圧力による内部エネルギー u 、乱流の運動エネルギー k 、帯状流の運動エネルギー f を 3 変数にもち、エネルギーの入力を表すフリーパラメータ q をもつ 3 変数の常微分方程式である Sugama-Horton モデルに対して、時間大域解が一意に存在することを証明した。Sugama-Horton モデルは prey-predator モデルの一般形となっており、わかりやすく述べると、 q を食べて u が成長して、 u を食べて k が成長して、 k を食べて f が成長するモデルとなっている。ところが、Sugama-Horton モデルは、微分方程式の右辺が未知関数の多項式で表されていないため、通常の prey-predator モデルの数学解析よりもはるかに解きにくいモデルであることが判明した。ところが、A.Korobeinikov, *Mathematical Medicine and biology*, 26, 309-321, 2009. の論文で一般化 prey-predator モデルに対するリャプノフ関数の構成方法が明らかにされており、その論文の計算手法が適応可能であることがわかった。Sugama-Horton モデルの k の式の散逸係数が $1/u$ の形をしているケースに対しては何も言えなかったが、 k の式の散逸係数が定数という簡単なケースを考えたときには、Sugama-Horton モデルの q が十分に小さいときには、L-mode と呼ばれる定常解 ($f=0$ という特徴をもつ) が大域的に漸近安定であることが証明できることがわかった。また、 q を大きくしていくと、limit cycle が表れることが線形安定性解析と数値計算から明らかにすることができた。また、Sugama-Horton モデルの右辺の大部分を未知関数

の多項式に置き換えたモデルとして Ball-Dewar モデルと呼ばれるものが提案されていたが、Sugama-Horton モデルとの比較する目的で Ball-Dewar モデルに対しても数学解析を行った。Ball-Dewar モデルは Sugama-Horton モデルから色々な部分を変更していたが、外力が u の式にしか現れないという設定の下で Ball-Dewar モデルを数学解析と数値計算したところ、Ball-Dewar モデルは limit cycle の解を持たないことが判明した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

S. Kondo, Global-in-time existence results for the two-dimensional Hasegawa-Wakatani equations, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 査読有, 197 (2018), 1799-1819.

〔学会発表〕(計 6 件)

S. Kondo, Global-in-time existence results for the two-dimensional Hasegawa-Wakatani equations, 名古屋力学系セミナー, July 10, 2018.

S. Kondo, Global-in-time existence results for the two-dimensional Hasegawa-Wakatani equations, 第 4 3 回発展方程式研究会, Dec. 27, 2017.

S. Kondo, Global-in-time existence results for the two-dimensional Hasegawa-Wakatani equations, poster presentation in ICMMA2017, Dec. 12, 2017.

S. Kondo, Almost periodic solutions to Hasegawa-Wakatani equations, 名古屋微分方程式セミナー, 名古屋大学, April 17, 2017.

S. Kondo, Almost periodic solution to Hasegawa-Wakatani equations, シミュレーション学研究所のセミナー, 兵庫県立大学大学院, January 24, 2017.

S. Kondo, Almost periodic solution to Hasegawa-Wakatani equations, 岐阜数理科学セミナー, 岐阜大学, December 9, 2016.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://www1.gifu-u.ac.jp/~collog/>

6 . 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。