

平成 31 年 5 月 5 日現在

機関番号：37111

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17635

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式の粘性解と微分ゲーム理論による手法

研究課題名(英文)Viscosity solutions of nonlinear partial differential equations and a game-theoretic approach

研究代表者

柳 青(LIU, QING)

福岡大学・理学部・助教

研究者番号：70753771

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文):本研究では,粘性解理論に基づき,微分ゲームによる手法を用いて非線形偏微分方程式の可解性問題や解の挙動等を解明することができた.特に,放物型方程式の動的境界値問題のゲーム論的解釈を確立し,時間分数階微分を持つ発展方程式の近似解の構成にも成功した.また,画像処理の数理モデルに着目し,冪乗型曲率流方程式の漸近挙動を明らかにできた.更に,ユークリッド空間のみならず,ハイゼンベルグ群においても粘性解理論を用い,完全非線形放物型方程式系の解の一意存在性を証明できた.

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では,微分ゲームによる方法を積極に取り入れることにより,非線形偏微分方程式の粘性解理論を発展させることができた.ユークリッド空間のみならず,より一般的な距離空間上でも偏微分方程式の解の一意存在性,正則性と凸性等の問題を解決できた.更に,画像処理や土壌汚染問題などを記述する数理モデルに対し,粘性解理論を用い,解の構成法と漸近挙動を考察し,それらの実際の問題に応用できる基礎的な数学理論を構築し,社会貢献に繋がる研究成果が得られた.

研究成果の概要(英文): In this research project, we used the game-theoretic approach to study the well-posedness and behavior of solutions of various nonlinear partial differential equations based on viscosity solution theory. In particular, we established a game interpretation for dynamic boundary problems of parabolic equations and constructed approximate solutions of time fractional evolution equations. Moreover, motivated by applications in image processing, we investigated the asymptotic behavior of solutions to power curvature flows. In addition to the study in the Euclidean space, we also used the viscosity solution theory to prove existence and uniqueness of solutions to fully nonlinear parabolic systems on the Heisenberg group.

研究分野：非線形解析

キーワード：粘性解 完全非線形偏微分方程式 微分ゲーム 時間分数階微分 ハイゼンベルグ群 サブリーマン多様体

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19（共通）

### 1. 研究開始当初の背景

ここ数年では、離散的微分ゲームによる新たなアプローチがアメリカの研究者によって提案され、注目を集めている。Y. Peres氏の研究グループがTug-of-warという確率的な離散微分ゲームを構築し、そのゲームの値関数がp-Laplace方程式の唯一の粘性解に一様収束することを示した。それと同時に、R. V. Kohn氏とS. Serfaty氏は似た観点から、レベルセット平均曲率流方程式の粘性解に対して決定論的微分ゲームによる近似法を示した。それ以来、より一般的な方程式および様々な境界値問題に対するゲーム論的近似定理が明らかにされ、偏微分方程式論の新しい方向として著しく発展している。更に、このようなゲーム論的解釈は数値解析への応用に限らず、退化楕円型と放物型方程式の解の存在と表現定理を与えるとともに、解の様々な性質を考察するための道具として応用されている。重要な未解決問題に挑戦するための強力な手法となることが期待できる。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は自然科学に現れる現象を記述する様々な非線形偏微分方程式について、微分ゲーム理論を用い、新たな視点から微分方程式の解の挙動や性質などを深く理解することである。これまで提唱された様々な非線形偏微分方程式に対するゲーム論的解釈をさらに一般化し、粘性解の様々な性質を調べ、偏微分方程式論への斬新なアプローチを確立することを目指す。さらに、ゲーム論的方法を生かし、ユークリッド空間のみならず、ハイゼンベルグ群などより複雑な距離空間上の解析理論を発展させることも目標とする。

### 3. 研究の方法

最適制御や微分ゲーム理論による解の表現公式が非線形解析の重要な手法であることが広く認識されている。本研究ではそれを中心として様々な研究課題に取り組んでいた。ユークリッド空間において、二階非線形放物型方程式の初期値問題のゲーム論的解釈は既に知られているため、境界値問題やより複雑な距離空間などの設定でゲーム理論による手法を重点的に考察する課題とした。特に、動的境界値問題、ハイゼンベルグ群、測地空間などに関連する先行研究を徹底的に調べ、粘性解理論を活用して完全非線形偏微分方程式の可解性問題および解の幾何学性質について解析を行った。更に、画像処理などの数理モデルに関する研究でも、従来の粘性解理論を拡張し、新たな解の定義を与え、一意性問題を考察した。本研究を実行する際、国内外における多数の研究集会で研究発表を行い、多くの研究者と議論した。偏微分方程式とゲーム理論に関する最新の発展を把握すると同時に設定した目標の実現に努めた。

### 4. 研究成果

(1) ハイゼンベルグ群上の半線形放物型方程式について粘性解の凸性保存定理を考察した。ユークリッド空間の場合と同様な保存定理が期待できないことを明らかにした。さらに、ハイゼンベルグ群における新たなリプシツ連続性と凸関数の概念を導入し、時間発展とともにそれらの性質が保存されことを示せた。この結果に関する論文は学術雑誌 *Calculus of Variation and Partial Differential Equations* に掲載された。

(2) ハイゼンベルグ群における放物型方程式系の可解性についてウースター工科大学数学科の X. Zhou 氏と共同研究を行った。システムの場合でも粘性解の一意存在定理の証明に成功し、非線形偏微分方程式の粘性解理論の応用をサブリーマン多様体へ広げた。この研究課題に関する論文は学術雑誌 *Nonlinear Anal.* に掲載された。

(3) ハミルトン・ヤコビ方程式の幾何学的性質のさらなる拡張として、一般の距離空間上の解の空間凸性の保存が京都大学の中安淳氏との共同研究で解明できた。この性質を示すために、距離空間自身の凸性が必要であることが判明した。測地線に基づく凸性を持つ初期値に対し、方程式の解は任意の時刻において同じ凸性を満たすことを明らかにした。中安淳氏との共著論文は学術雑誌 *Discrete Contin. Dyn. Syst.* に掲載された。

(4) 画像処理の数理モデルに現れるべき乗型曲率流方程式の大指数漸近挙動について研究を続けていた。初期値が凸である場合には、解の極限が 1-Laplace 方程式の障害物問題を満たすことが本研究で明らかになった。また、空間 1 次元冪乗型熱方程式に対しても類似な挙動を示し、不安定砂杭に関する数理解析への応用も実現できた。これらの結果を解説する論文は国際ジャーナル *Tran. Amer. Math. Soc.* と *Adv. Stud. Pure Math.* に掲載されることが決まった。さらに、初期値が凸でない場合には、前年度の研究で得られた結果を改良し、空間 1 次元においてより一般的な冪乗型方程式解の収束定理の証明に成功した。以上の研究結果について国内外の研究集会で多数の研究発表を行った。

(5) 微分ゲームの手法により動的境界条件付き非線形放物型方程式を考察した。特に、曲率流方程式の動的境界値問題に対して離散ゲームを構築し、その値関数が方程式の粘性解に収束することを示し、解の表現公式を与えた。これらの結果は北海道大学の浜向直氏との共同研究に基づくものであり、研究論文は国際学術誌へ投稿中である。

(6) Caputo 分数階時間微分をもつ発展方程式に関する研究が最近盛んに行われている。東京大学の儀我美一氏と三竹大寿氏との共同研究では、時間分数階偏微分方程式の最適制御やゲーム理論による解釈の確立を目標とし、一般的な完全非線形退化放物型方程式の粘性解に収束する離散スキームを導出することに成功した。その研究結果を論文として現在国際学術誌へ投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

(雑誌論文) (計 5 件)

- 1) Q. Liu, J. J. Manfredi, X. Zhou, Lipschitz continuity and convexity preserving for solutions of semilinear evolution equations in the Heisenberg group, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 55(2016), 55:80. (査読有)
- 2) Q. Liu, X. Zhou, Weakly coupled systems of fully nonlinear parabolic equations in the Heisenberg group, *Nonlinear Anal.*, 174(2018), 54-78. (査読有)
- 3) Q. Liu, A. Nakayasu, Convexity preserving properties for Hamilton-Jacobi equations in geodesic spaces, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 39(2019), 157-183. (査読有)
- 4) Q. Liu, N. Yamada, An obstacle problem arising in large exponent limit of power mean curvature flow equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 掲載決定. (査読有)
- 5) Q. Liu, On an obstacle problem arising in large exponent asymptotics for one dimensional fully nonlinear diffusions of power type, *Adv. Stud. Pure Math.*, 掲載決定. (査読有)

(学会発表) (計 21 件)

- 1) 柳青, Convexity preserving properties for Hamilton-Jacobi equations in geodesic

- metric spaces, 広島大学HMAセミナー, 2016年10月21日.
- 2) 柳青, Convexity preserving properties for Hamilton-Jacobi equations in geodesic metric spaces, 九州関数方程式セミナー, 2016年11月4日.
  - 3) 柳青, Convexity preserving properties for nonlinear evolution equations, 東京大学諸分野のための数学研究会, 2016年11月17日.
  - 4) Qing Liu, On small and large exponent limits of power mean curvature flow equation, Conference on Nonlinear Waves, University of Pittsburgh, Pittsburgh, USA, 2017年3月19日.
  - 5) Qing Liu, On small and large exponent limits of power mean curvature flow equation, Analysis and PDE seminar, Worcester Polytechnic Institute, Worcester, USA, 2017年3月28日.
  - 6) Qing Liu, Discrete game theory and nonlinear partial differential equations, PDE seminar, Fudan University, Shanghai, China, 2017年6月2日.
  - 7) Qing Liu, Discrete game theory and applications in nonlinear partial differential equations, PDE seminar, Tongji University, Shanghai, China, 2017年6月5日.
  - 8) 柳青, Convexity preserving properties for Hamilton-Jacobi equations in geodesic metric spaces, 福岡大学確率論セミナー, 2017年6月29日.
  - 9) Qing Liu, On small and large exponent limits of power mean curvature flow equation, Optimal Control and PDE, Thematic Program: Nonlinear Partial Differential Equations for Future Applications, 東北大学, 2017年7月21日.
  - 10) 柳青, Large exponent behavior of power-type nonlinear evolution equations and applications, 東北大学応用数学セミナー, 2017年11月2日.
  - 11) 柳青, On large exponent behavior of power curvature flow arising in image processing, 数学と現象: Mathematics and Phenomena in Miyazaki, 宮崎大学, 2017年11月17日.
  - 12) 柳青, Vanishing exponent behavior of power mean curvature flow and applications, NLPDEセミナー, 京都大学, 2017年12月1日.
  - 13) Qing Liu, On small and large exponent limits of power mean curvature flow equation, PDE seminar, Tongji University, Shanghai, China, 2018年4月18日.
  - 14) 柳青, A discrete game interpretation for curvature flow equations with dynamic boundary conditions, PDE実解析セミナー, 東京大学, 2018年5月22日.
  - 15) Qing Liu, Large exponent behavior of power-type evolution equations and applications, RIMS 共同研究(公開型)「偏微分方程式の解の形状解析」, 京都大学, 2018年6月27日.
  - 16) Qing Liu, Large exponent behavior of power-type evolution equations and applications, The 11th Mathematical Society of Japan (MSJ) Seasonal Institute (SI), The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations, 北海道大学, 2018年7月2日.
  - 17) Qing Liu, Large exponent behavior of power-type evolution equations and applications, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, National Taiwan University, Taipei, 2018年7月5日.
  - 18) 柳青, Large exponent behavior of power-type evolution equations and applications, 第14回非線型の諸問題, 長崎商工会議所2階ホール, 2018年9月10日.
  - 19) Qing Liu, Large exponent behavior of power-type evolution equations and applications, Joint Firenze-Tohoku Research Workshop on Nonlinear PDEs, Firenze University, Italy, 2018年10月22日.
  - 20) Qing Liu, Large exponent behavior of power-type evolution equations and applications, 2018 China-Japan Workshop on Nonlinear Diffusion Problems, Shanghai Normal University, Shanghai, China, 2018年11月3日.
  - 21) 柳青, Large exponent behavior for power curvature flow and applications, 全体講演, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 京都大学, 2018年12月23日.

(図書) (計 0 件)

(産業財産権)

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

(その他)

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：  
ローマ字氏名：  
所属研究機関名：  
部局名：  
職名：  
研究者番号 (8 桁)：

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：  
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。