

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：23901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17645

研究課題名(和文)行列式点過程を用いた積分近似理論の新構築, 及びその応用

研究課題名(英文) Research on constructions of numerical integration methods via determinantal point processes and its applications

研究代表者

平尾 将剛 (Hirao, Masatake)

愛知県立大学・情報科学部・准教授

研究者番号：90624073

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文): 球面上の代表的な行列式点過程である球面アンサンブルや調和アンサンブルに着目し, その数値積分性能について, およびいくつかの応用について研究・考察を行なった. 前者に関しては, 球面上のソボレフ空間における数値積分の最悪誤差のふるまいに関する調査し, 球面アンサンブルは, 滑らかさが $1 < s < 2$ の2次元球面上のソボレフ空間に対して準モンテカルロデザイン系列を漸近的に生成することなどを確認し, 特定の関数空間における行列式点過程の有用性を確認した. さらに応用上重要であるフレームポテンシャルの評価に関する研究, およびカーネル法における特徴写像の近似理論などを通じ, 行列式点過程の汎用性を示唆した.

研究成果の学術的意義や社会的意義

Brauchart et al. (2014)で準モンテカルロデザイン系列が提案されて以降, 行列式点過程を用いた確率的生成法の研究が行われているが, 本研究はそれらの研究に対して先鞭をつけたものであり, 多くの後続研究が現在行われている. また行列式点過程の応用として数値解析だけではなく, 統計学, 機械学習の問題も扱ったことで今後, 様々な分野に広く発信できるものと予想している.

研究成果の概要(英文): Focusing on, e.g., spherical ensembles and harmonic ensembles, which are typical determinant point processes on the sphere, numerical integration performances and some applications are discussed.

For the former, we investigate the behavior of the worst error of numerical integration in some Sobolev spaces on the sphere, and show spherical ensembles asymptotically approximate QMC design sequences to Sobolev spaces on the two-dimensional sphere with smoothness $1 < s < 2$, which is confirmed that the determinant point process is useful in a specific function space. Furthermore, several availabilities of determinant point processes are suggested through the research on frame potentials and the approximation theory of the feature maps in the kernel method.

研究分野：数学

キーワード：行列式点過程 準モンテカルロデザイン系列 球面アンサンブル 調和アンサンブル デザイン理論 準モンテカルロ法 Cubature公式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ユークリッド空間内の領域上での多項式の積分を考える。**Cubature 公式**とは、その積分値を有限個の点での重み付き平均として正確に与える cubature 公式のことである。これまで様々な領域における cubature 公式の構成問題、及びその応用が諸分野において研究されてきた。特に積分領域を超球面とした場合の cubature 公式は、数値解析のみならず、統計学、代数的組合せ論等に応用を持つことが知られている。

数値解析においては、球面上の積分に対する cubature 公式をなす点配置 (**球面デザイン**) は、単に多項式だけではなく、より広いクラスの関数の積分に対して、近似誤差が少ない点配置であることが知られている。統計的実験計画法においては、球面上の多項式回帰モデルの未知パラメータを上手く推定するための最適点配置は、球面デザインであることが知られている。

また、代数的組合せ論においては、アソシエーションスキームと呼ばれるある代数構造の観点から cubature 公式が調査されている。

このように応用は多岐に渡るが、その際に重要となる多項式の次数が高い場合、また、次元が大きい場合における cubature 公式の効率的な構成法は未だ知られていない現状がある。また、これまでの自身の調査において、特に有限群の軌道から生成される点配置に着目するなどの代数的組合せ論的観点からの構成法を提案してきたが、一般次元に対しては多項式の次数を高くは上げられないことや、高次数に対しては散在的な次元でしか構成できないこと等多数の問題があった。

そこで本研究では Brauchart et al.(2014)により提案された**球面上の準モンテカルロ系列**に着目する。この系列は球面上の積分に対して、準モンテカルロ法のアイデアを適用したものであり、より高速な誤差の収束を実現する球面上の近似点集合の増大列である。被積分関数は多項式だけに限定せず、球面上のソボレフ空間の関数などに対して、ロバストな近似点列である。

2. 研究の目的

Cubature 公式の構成法、球面上の準モンテカルロ系列の構成法・生成法は諸科学における幅広い要請があるものの解決にはいたっていない。特に後者に関しては、Brauchart et al.(2014)において確率的手法を用いた生成法 (ジッタードサンプリング法) が提案されているのみで、さらなる進展が必要となる。そこで本研究のひとつめの目的は

(1) **行列式点過程**と呼ばれるランダム点配置を用いた準モンテカルロ系列の確率的構成法の確立

である。行列式点過程とは、各点間に反発力が働く (それらの相関関数が行列式で与えられる) ランダム点配置のひとつであり、1970 年代中頃に Macchi によって量子力学的粒子のひとつであるフェルミ粒子をモデル化するために導入され、幾つかのシミュレーションアルゴリズムもすでに提案されているからである。

またふたつめの目的は

(2) 数値積分法、数理統計学など諸分野において応用研究を見つけること

である。特に行列式点過程の持つ「一様性」からその応用が幅広く期待される。

3. 研究の方法

代表的な球面上の行列式点過程として、**球面アンサンブル**と**調和アンサンブル**が知られている。そこでこの2つの行列式点過程に着目し、2-(1)で提示した問題を解決する際に重要となる数値積分と真値の**最悪誤差評価**の評価を行う。Brauchart-Womersley はこの最悪誤差の離散リースポテンシャル、および多項式で表現されるあるポテンシャルとして表現することに成功しており、この表現を用いることにより、より精密な評価を与えることを目指す。

さらに2-(2)では、諸分野への応用研究として、圧縮センシング等への基礎理論でも重要である (a)上記の行列式点過程がもつ(p-)フレームポテンシャルの評価、および機械学習の中における (b)特徴写像の近似について調査、研究を進めた。

特に(a)については、フレームポテンシャルが離散リースポテンシャルを用いた表現ができることを用い、精密な評価を行なった。

4. 研究成果

(1) 与えられた関数空間において最適な最悪誤差の収束レートを達成する系列が準モンテカルロデザイン系列である。そこで球面上の行列式点過程の代表例である球面アンサンブル、及び調和アンサンブルについて d 次元超球面上のソボレフ空間に対して球面上の準モンテカルロデザイン系列を生成するか否かを数値積分の最悪誤差のふるまいに関する調査をすることにより行なった。その結果、(a) 球面アンサンブルは、滑らかさが $1 < s < 2$ の2次元球面上のソボレフ空間に対して準モンテカルロデザイン系列を漸近的に生成する。滑らかさが $s > 2$ の2次元球面上のソボレフ空間に対しては準モンテカルロデザイン系列を生成しない、(b) 調和アンサンブルは d 次元球面上のソボレフ空間に対しては準モンテカルロデザイン系列を生成しないものの、滑らかさが $d/2+1/2 < s < d/2 + 1$ の球面上のソボレフ空間においては、その最悪誤差の収束レートは通常のモンテカルロ法と比較し、高速であることを示した。これら(a)、(b)の結果により、特定の関数空間における行列式点過程の有用性を論じることに成功した。

(2) フレームポテンシャル, およびタイトフレームは数値解析をはじめ, 調和解析や圧縮センシングの基礎理論となる関数空間上の等長埋め込み写像の構成理論に関して重要となる. これまでにランダム点配置のフレームポテンシャルに関しては, Ehler (2012) によって一様乱数を用いた場合のみが調査されてきたが, 自身により, 球面アンサンブル, 調和アンサンブル, およびジッタードサンプリングにおけるフレームポテンシャル, およびその拡張である p -フレームポテンシャルの上からの評価を与えることに成功した. 特にフレームポテンシャルに関する結果は, 一様乱数によるランダム点配置より, 行列式点過程の方がよりタイトフレームに近い構造であることを量的に示唆している. さらに p -フレームポテンシャルにおいても同様の示唆が得られる. また, 幾つかのポテンシャル関数についても結果を得ており, それに関連する統計的応用への今後の進展が期待される.

(3) 近年, Dao et al. (2017), Munkhoeva (2018) により, cubature 公式の理論を用いたカーネル法で重要となる特徴写像の近似解析が行われている. そこで球面デザイン, および球面上の準モンテカルロデザイン系列のひとつの応用として Hirao et al. (2019) において議論を行なった.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 平尾将剛	4. 巻 なし
2. 論文標題 On QMC designs and related topics	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第36回代数的組合せ論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 77-87
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masatake Hirao, Masanori Sawa	4. 巻 2
2. 論文標題 On almost tight Euclidean designs for rotationally symmetric integrals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Japanese Journal of Statistics and Data Science	6. 最初と最後の頁 615-639
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s42081-019-00048-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masatake Hirao	4. 巻 なし
2. 論文標題 QMC designs and determinantal point processes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2016	6. 最初と最後の頁 331-343
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/978-3-319-91436-7_18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 QMCデザインと球面上のランダム点配置について
3. 学会等名 大阪組合せ論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masatake Hirao
2. 発表標題 On p-frame potential of random point configurations on the sphere
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2018(JCCA2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masatake Hirao
2. 発表標題 On p-frame potential of random point configurations on the sphere
3. 学会等名 13th International Conference in Monte Carlo & Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤花奈美, 平尾将剛
2. 発表標題 超八面体群を用いたweighted spherical designの構成
3. 学会等名 2019年度日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松浦慶岳, 平尾将剛, 澤正憲
2. 発表標題 On tight or almost tight Euclidean design for circularly symmetric integrals
3. 学会等名 2019年度日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹村辰之輔, 平尾将剛
2. 発表標題 On tight spherical-cap design
3. 学会等名 2019年度日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 Finite frames, frame potentials and determinantal point processes on the sphere
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications (JCCA- 2017)・離散数学とその応用研究集会2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 Frame potentials of determinantal point processes on the d-sphere
3. 学会等名 2017年度数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 球面デザインとその周辺
3. 学会等名 愛媛大学 代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masatake Hirao
2. 発表標題 Comparison of frame potentials of random point configurations on the sphere
3. 学会等名 5th International Combinatorics Conference (5ICC) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 On p-frame potential of random point configurations on the sphere
3. 学会等名 2018年度日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masatake Hirao
2. 発表標題 QMC design, frame potential and determinantal point process on the sphere
3. 学会等名 The 5th Japan-Taiwan Conference on Combinatorics and its Applications (5th TJCCA) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masatake Hirao
2. 発表標題 QMC designs and determinatal point processes
3. 学会等名 The MCQMC Conference 2016 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 行列式点過程を用いた数値積分法とその応用
3. 学会等名 OR学会中部支部講演会（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 球面上の準モンテカルロデザイン系列と行列式点過程
3. 学会等名 研究集会「無限粒子系、確率場の諸問題XII」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 Determinantal point processes, QMC designs and one-bit sensing on the sphere
3. 学会等名 IMI workshop: Analysis of Random Fields for Deep Learning and Its Application
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 行列式点過程の準モンテカルロ積分への応用
3. 学会等名 科研費シンポジウム「統計的モデリングと計算アルゴリズムの数理と展開」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 平尾将剛
2. 発表標題 QMC designs on the sphere with determinantal point processes
3. 学会等名 Hakata Workshop 2017(博多ワークショップ)-Discrete Mathematics and its Applications
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----