

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年5月23日現在

機関番号：32665

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17648

研究課題名(和文) 確率分布にギャップ構造をもつ量子ウォークの長時間極限定理の研究

研究課題名(英文) A study of limit theorems for quantum walks with gaps in distribution

研究代表者

町田 拓也 (MACHIDA, Takuya)

日本大学・生産工学部・助教

研究者番号：20637144

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：補助事業期間全体を通じて、著書2本(単著1本、共著1本)と査読付論文4本(単著3本、共著1本)の出版、そして、国際招待講演1件、国内招待講演7件、一般講演1件の研究発表を行った。解析した量子ウォークモデルは、「ある物理方程式に関して、ギャップ構造を確率分布にもつような直線上の二状態量子ウォーク」、「局在化とギャップ構造を確率分布に同時にもつような直線上の三状態量子ウォーク」、「ある量子ゲームモデルに関して、確率分布に局在化を生じるような直線上の四状態量子ウォーク」、そして、「半直線上の二状態量子ウォーク」である。いずれのモデルに対しても、数学的手法を用いた極限分布の計算に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子ウォークの長時間極限定理は、ウォーカーが十分多くの時間発展を繰り返した後のウォーカーの振舞いを漸近的に記述する。得られたおもな研究成果は、数学的手法で計算された極限定理である。解析したそれぞれの量子ウォークモデルの確率分布は、得られた研究成果である長時間極限定理から構成される近似関数によって、よく再現されており、結果としてそれぞれの確率分布の特徴を数学的に明らかにすることができた。また、量子物理学のある方程式に関連した量子ウォークモデルが、その確率分布にギャップ構造をもつことを発見できたことは新しく、学術的に意義があった研究成果といえる。

研究成果の概要(英文)：I published one book, one book chapter, and four research papers from international journals. Also, I gave one talk at an international conference and eight talks at domestic meetings. The results I have got are as follows; 2-state quantum walk on the line which is involved in a Weyl equation and whose probability distribution holds a gap, 3-state quantum walks on the line whose probability distribution holds both a gap and localization, 4-state quantum walk on the line motivated by a quantum game, 2-state quantum walk on the half-line. I succeeded in analyzing those quantum walks by Fourier analysis which resulted in long-time limit distributions. The limit distributions which I derived, reproduced the probability distributions of the quantum walkers and told us how the quantum walkers acted after they iterated their dynamics a lot of times.

研究分野：量子ウォーク

キーワード：量子ウォーク 極限定理

1. 研究開始当初の背景

量子ウォークは、2000年頃から活発な研究が始まった研究分野であり、量子コンピュータの理論研究(量子探索アルゴリズム)とともに、その裾野を広げてきた。数学的な視点からは、ランダムウォークの量子版と考えられるため、量子ランダムウォークとよばれることもある。一方、物理学的な視点からは、ディラック(Dirac)方程式の時空間離散版と見なすことができ、量子物理学の背景も色濃くもつ数理モデルである。このような背景をもつことから、数学のみならず、物理学、量子情報学の各分野から多くの専門家が、量子ウォークの研究分野に初期の段階から携わっている。実際、量子ウォークの導入は、数学、物理学、そして、コンピュータ・サイエンスの各分野から独立に行われた。これまでに、多くの理論的な研究結果が得られており、近年は実際の物理システムで量子ウォークの実験が成功しつつあることもあり、その応用に向けた研究も盛んになり始めている。

2. 研究の目的

ランダムウォークの量子版と考えられる量子ウォークは、ランダムウォーク同様、その理論を応用するための研究が広まりつつある。本研究では、確率分布がギャップ構造をもつような量子ウォークのモデルを発見して、その長時間極限定理を数的手法によって導出することを目的とする。確率分布にギャップが生じるような量子ウォークのモデルは、導体、絶縁体、半導体、そして、近年話題のトポロジカル絶縁体を議論するような物性物理の理論への応用を期待することができる。

3. 研究の方法

本研究では、格子上で運動が定義される量子ウォークに焦点を当て、具体的なモデルを構成して、それから得られる確率分布についての研究を行う。研究はおもに二段階に分けられ、「1. 確率分布にギャップをもつようなモデルの発見」、「2. 発見したモデルに対する長時間極限定理の導出」である。数学的あるいは物理学的な先行研究を参考にして、数値計算も併用することで、モデルの発見にアプローチする。これまでの量子ウォークの解析に用いられてきた数的手法を用いることで確率分布の振舞いを明らかにし、最終的に長時間極限定理を導出する。

4. 研究成果

(1) 離散時間量子ウォークは、量子物理学において、スピンをもった粒子の運動を記述する相対論的な方程式である Dirac 方程式の時空間離散版と見ることができ、特に、質量 0 の Weyl 粒子の運動を記述する方程式は、Weyl 方程式と呼ばれる。量子ウォークのフーリエ変換の時間発展作用素が、Weyl 方程式の時間発展作用素のクラスに入るような 1 次元格子上の量子ウォークを構成して、その確率分布の解析を行った。数値計算を用いることで、確率分布にギャップ構造が生じることが予想できた。さらに、フーリエ解析を用いて、理論的に確率分布を解析することで、長時間極限定理を導出した。その結果、ギャップ構造が実際に生じることを数学的に証明することができた(図 1)。この研究成果は、論文にまとめられて国際雑誌「International Journal of Quantum Information」から出版された。また、研究集会などで研究成果の発表も行った(現象数理学研究集会(2018)、数理科学セミナー(2018))。

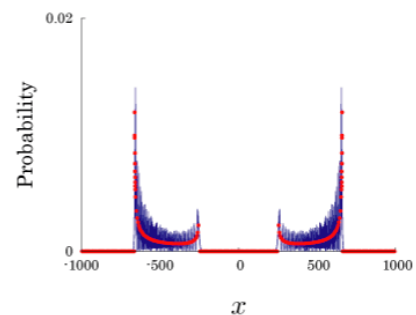


図 1

(2) 1 次元格子上で定義される、ある三状態量子ウォークに対し、確率分布の解析を行った。この量子ウォークの時間発展作用素であるユニタリ作用素は時刻に依存しており、3 周期で変化する。時刻に対し、3 周期でユニタリ作用素が変化するような二状態量子ウォークに対しては、ギャップ構造が生じることが過去の研究において明らかにされている。同様に、三状態量子ウォークでもギャップ構造が生じることがわかった。二状態モデルとの大きな違いは、局在化の有無である。3 周期時刻依存型二状態量子ウォークでは局在化が生じることはなく、ギャップ構造のみであった。一方、3 周期時刻依存型三状態量子ウォークでは、局在化とギャップ構造が同時に生じることを明らかにできた(図 2)。フーリエ解析を用いた計算により極限定理を導出することができ、確率分布の連続部分に関しては明示的な関数表示を得ることができた。一方、局在化部分に関しては具体的な表示は得られなかったが、局在化が生じることは、極限定理により証明することができた。研究成果は、論文にまとめられて国際雑誌

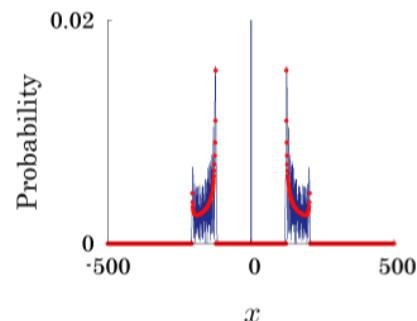


図 2

「Quantum Information and Computation」から出版された。また、研究集会などで研究成果の発表も行った(今野・竹居研究室セミナー(2017)、日本大学生産工学部学術講演会(2016))。

- (3) 量子ウォークは量子情報の分野でも盛んに研究されており、量子ゲームの数理モデルとしても研究されている。古典的な確率ゲームにおいては、Parrondo paradox という興味深いパラドクスの存在が確認されている。2種類の確率的な負けゲームを適当な時間周期で交互に繰り返すことによって、勝ちゲームを構成することができるような(負け)ゲームが存在するというパラドクスである。量子ゲームの分野でも同様なパラドクスの存在に興味もたれ、これまでにさまざまなゲームモデルの研究が行われてきており、数値計算を用いた解析によりパラドクスの存在が示唆されてきた。過去の研究で数値的に解析された(ある量子ウォークに基づいた)量子ゲームに対し、その確率分布を解析することで Parrondo paradox の存在を証明することができた。具体的には、ある量子ゲームとして意味をもつ 1次元格子上的四状態量子ウォークの確率分布に対し、2種類の長時間極限定理をフーリエ解析を用いて計算した(図3)。その結果を応用することで、量子ゲームにも Parrondo paradox が存在することを数学的に証明できた。研究成果は論文にまとめられて、国際雑誌「Quantum Information Processing」から出版された。また、研究成果の発表も行った(数理科学セミナー(2019))。

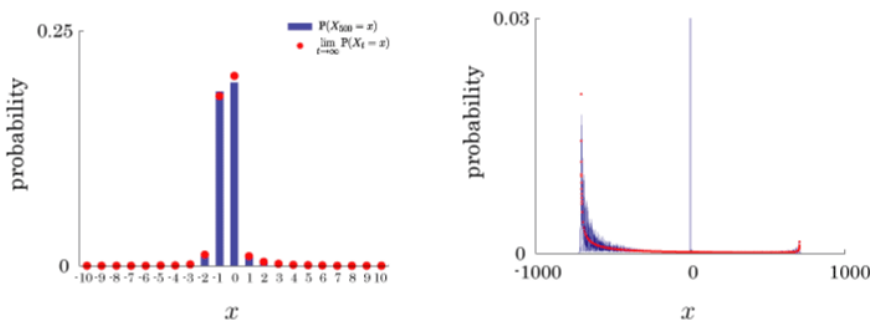


図 3

- (4) 量子ウォークの極限定理は、1次元直線上のモデルについては、これまでに多くの結果が得られてきた。一方、半直線上の量子ウォークは、端点があることにより量子ウォークの時間発展ルールが空間一様ではなくなり、直線上の量子ウォークに比べ計算が煩雑になるために、得られている解析結果が少ない。ある半直線上の量子ウォークの時間発展を、直線上の量子ウォークの時間発展に焼きなおせることを数値計算によって発見し、さらに数学的に証明した。その結果と先行研究の結果を利用して、任意の有限時刻での確率分布を得た(図4)。さらに、焼き直した直線上の量子ウォークに対し、フーリエ解析によって長時間極限定理を導出することで、半直線上の量子ウォークの極限定理の導出に成功した(図5)。この研究成果は、論文にまとめられて国際雑誌「Quantum Information Processing」から出版された。また、研究集会などで、得られた結果の発表も行った(Mathematical Congress Of The Americas(2017)、数理科学セミナー(2017)、今野・竹居研究室セミナー(2017))。

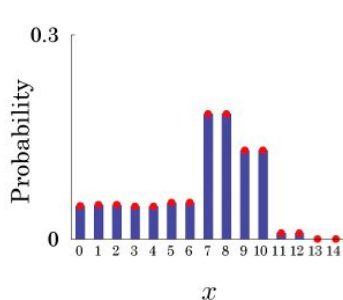


図 4

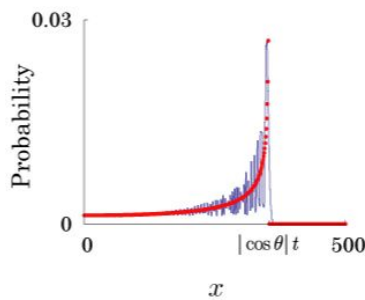


図 5

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計4件)

T. Machida, F. Alberto Grünbaum, “Some limit laws for quantum walks with applications to a version of the Parrondo paradox”, Quantum Information Processing, Vol.17(9), 241 (2018). (査読有) <https://doi.org/10.1007/s11128-018-2009-4>

T. Machida, “A limit theorem for a splitting distribution of a quantum walk”, International Journal of Quantum Information, Vol.16, No.3, 1850023 (2018). (査読有)

<https://doi.org/10.1142/S0219749918500235>

T. Machida, “A localized quantum walk with a gap in distribution”, *Quantum Information and Computation*, Vol.16 No.5&6, pp.515-529 (2016). (査読有)

<https://doi.org/10.26421/QIC16.5-6>

T. Machida, “A quantum walk on the half line with a particular initial state”, *Quantum Information Processing*, Vol.15, No.8, pp. 3101-3119 (2016). (査読有)

<https://doi.org/10.1007/s11128-016-1351-7>

〔学会発表〕(計9件)

町田拓也, “量子ウォークの極限定理と量子ゲームで生じるパロンド・パラドクス”, 数理科学セミナー(於 北海道大学)(2019).

町田拓也, “量子ウォーク -量子の世界の奇怪な現象-“, 現象数理学研究集会(於 宮崎大学)(2018).

町田拓也, “ある Weyl 方程式に関する量子ウォークの極限分布”, 数理科学セミナー(於 北海道大学)(2018).

町田拓也, “量子ウォーク入門”, 量子光学・量子情報セミナー(於 日本大学)(2017).

T. Machida, “Quantum walk on a half line”, *Mathematical Congress Of The Americas*(於 The Centre Mont-Royal and McGill University)(2017).

町田拓也, “半直線上の2状態量子ウォーク”, 数理科学セミナー(於 北海道大学)(2017).

町田拓也, “確率分布にギャップ構造をもつ量子ウォークの極限定理”, 今野・竹居研究室セミナー(於 横浜国立大学)(2017).

町田拓也, “半直線上の量子ウォーク”, 今野・竹居研究室セミナー(於 横浜国立大学)(2017).

町田拓也, “量子ウォーク”, 日本大学生産工学部学術講演会(於 日本大学)(2016).

〔図書〕(計2件)

町田拓也, “量子ウォーク -基礎と数理-”, 裳華房, 総頁数 204 (2018).

T. Machida, Chapter 2 “Quantum Walks” in the book “Research Advances in Quantum Dynamics”, *InTech*, pp.27-51 (2016).

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：

取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

<http://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/Profiles/129/0012844/profile.html>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：F. Alberto Grünbaum

ローマ字氏名：F. Alberto Grünbaum

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。