様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７６４９

研究課題名（和文）非線形・非平衡系におけるビリヤード問題の発展～対称性と退化を伴う分岐～

研究課題名（英文）A billiard problem in nonlinear and nonequilibrium systems: bifurcation with symmetry and degeneracy

研究代表者
宮路　智行（Miyaji，Tomoyuki）

明治大学・研究・知財戦略機構・特任准教授

研究者番号：２０６１３３４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線形非平衡系において自発的に駆動力を獲得して運動する自己駆動粒子が有界領域に閉じ込められたとき，どのような軌道を描くか数理的に理解することを目的とした．そのような自己駆動粒子は様々な系で観察されている．その力学系は保存系のビリヤード問題と異なりアトラクタを持つ．長方形領域のアスペクト比を連続的に変化させると，アトラクタは周期軌道と準周期軌道とに間欠的に切り替わる．本研究ではその理由が水平方向と垂直方向の振動の同期現象として理解できること，また，間欠性の起源が，パラメータ平面において，静止状態が不安定化して定常的な運動が起こる対称性破壊分岐に対応する分岐点であることを突き止めた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
水面を動く樟脳円板や油滴，非線形光学の数理モデルなど自己駆動粒子系は科学の様々な系で観察され，研究されている．平面上の反応拡散系における進行スポット解が典型例であるが，それらの系で自己駆動粒子は漸近的な等速直線運動と領域境界での非完全弾性反射を繰り返すようである．自己駆動粒子研究の多くは多数の自己駆動粒子間の相互作用から生じる集団的運動に注目している．本研究では単一の粒子が領域境界と相互作用することで描かれる軌道を研究するものである点が新しい．縮約された常微分方程式系を分岐理論によって研究することで，自己駆動力を生み出す機構の詳細に依存しない普遍的な性質を数学的に示しうることは意義深い．

研究成果の概要（英文）：Orbits of a self-propelling particle in nonlinear and nonequilibrium systems are studied from viewpoint of mathematics. Such particles are observed in many systems. In contrast to classical billiard problems, the dynamical system of the particle has an attractor. As the aspect ratio of a rectangular domain varies, the attractor becomes periodic or nonperiodic intermittently. In this study, it turned out that such an intermittent change can be understood as a kind of synchronization between vertical and horizontal oscillatory modes and that its origin is a symmetry breaking bifurcation point of the rest state at which stable rest state loses stability and stationary motion occurs.

研究分野：非線形解析

キーワード：力学系の分岐　ビリヤード問題　自己駆動粒子　反応拡散系　進行スポット

様　式　C－19、F－19－1、Z－19、CK－19（共通）

１．研究開始当初の背景

数学的ビリヤード問題は力学系の理論と応用で重要な位置を占めてきた．その研究対象は等速直線運動と完全弾性反射を繰り返して運動する質点の軌道の性質であった．一方，樟脳円板[Chen et al., 2009]や油滴[Protière et al., 2006]といった自己駆動粒子や平面上の反応拡散系の進行スポット[Ei et al., 2006]や非線形光共振器における cavity soliton の数理モデル[Prati et al, 2011]におけるスポット解の反射運動など様々な系で，直進と非完全弾性反射を繰り返すビリヤード的な運動が報告されていた．非線形・非平衡現象で運動を獲得して直進・反射を繰り返す自己駆動粒子をここでは非平衡ビリヤード球と呼ぶ．その運動は境界から遠いところでは直進し，境界に衝突せずに反射し，入射角よりも反射角が大きくなるようである（上図）．個々の自己駆動粒子系において定常的な運動が生じるメカニズムや集団運動に関する研究は盛んに行われているが，保存系である古典的なビリヤード問題に対して，スポット解などの非線形・非平衡系におけるビリヤード問題に普遍的な性質の研究はあまりなされていなかった．

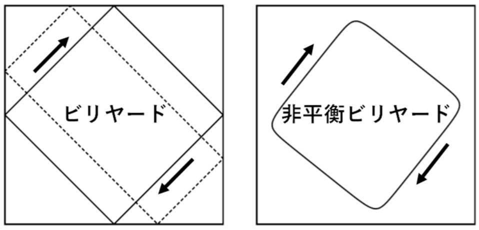

図 1 古典的ビリヤードと非平衡ビリヤード

２．研究の目的

本研究では水面に浮かべた樟脳円板運動の数理モデルを通して，正多角形や円板など有界な領域に閉じ込められた非平衡ビリヤード球において，どんな軌道がなぜ，どのように現れるか数理的に理解することを目的とした．

３．研究の方法

以下に述べるように，数学解析と数値シミュレーションにより研究を遂行した．数値シミュレーションには当該研究費で購入のワークステーションおよび文部科学省共同利用・共同研究拠点明治大学先端数理科学インスティテュート現象数理学研究拠点の共用計算機設備 MIMS-SMP を活用した．国内出張・国外出張により成果発表・情報収集・研究議論を行った．また，ダイナミクス全構造計算法や群論的分岐理論の専門家を招聘して，明治大学中野キャンパスで定期開催しているセミナー「ダイナミクス研究会中野」での知識の供与を依頼した．

(1) [Mimura et al., 2007]において数値計算による研究が行われた矩形領域における樟脳円板運動の常微分方程式モデル（粒子モデル）に対して，力学系の分岐理論・標準形定理による平衡点の分岐解析を行った．

(2) 数値分岐解析ソフトウェア AUTO を用いて常微分方程式モデルの周期軌道のパラメータに対する path continuation を行った．また，準周期トーラスの path continuation を目指し，数値的追跡手法の実装を試みた．また，ダイナミクス全構造計算法([Arai et al., 2009])による Morse グラフの近似計算を試みた．

(3) 円板領域における運動のモデルとして[Koyano et al., 2015]の数理モデルに対して周期軌道の数値分岐解析手法を適用した．

(4) 入射角と反射角の関係式に基づく離散力学系モデルによる多角形領域における数値シミュレーションと数学解析および偏微分方程式モデルに対する有限要素法による数値シミュレーションにより，常微分方程式モデルとこれらモデルの比較検討を行った．

４．研究成果

(1) 矩形領域におけるアトラクタ構造の変化

矩形領域においてアスペクト比の変化に伴い，アトラクタの構造が間欠的に変化する理由をつきとめた．この成果は雑誌論文 2 に発表した．典型的なパラメータでは，正方形領域においては各辺を順番にめぐる正方形状の周期軌道がアトラクタとなる．アスペクト比が多少変わっても，アトラクタは長方形状になるだけである．しかし，アスペクト比が１から大きく離れると領域を埋め尽くす準周期的な軌道が突然現れ，アスペクト比の変化にともない周期の短い周期軌道が現れるパラメータ区間と準周期的アトラクタとが間欠的に変化する（図 2）． 当初は正方形状周期軌道からアスペクト比で連続的に変化する長方形軌道の不安定化やサドルノード分岐に伴う現象だと考えていたが，数値分岐解析やダイナミクス全構造解析法によればその描像は正しくないことがわかった．

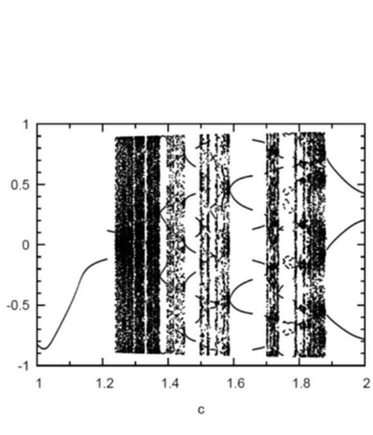

図 2 軌道ダイアグラム（雑誌論文 2）

そこで，各周期的アトラクタに回転数を定義し，パラメータに対してプロットすると，いわゆる devil's staircase のようなグラフ（図 3）や Farey 数列の構造が観察された．また，各周期的アトラクタが生成・消滅するパラメータ値をパラメータ平面上で数値的に追跡すると，Arnold の舌が観察される（図 4）．そしてそれらは，長辺方向の振動モードから分岐することが数値計算でわかった．

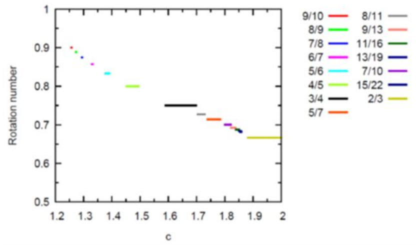

図 3 回転数

すなわち，長辺方向および短辺方向に垂直に跳ね返る周期的振動の結合振動子系であり，それらの位相ロッキングによって図 1 のような構造が説明できる．さらに，領域中央で静止している状態に対応する平衡点の分岐解析（D2 対称性を伴う Hopf-Hopf 分岐）により，パラメータの変化に伴う静止状態の不安定化（定常的な運動の発生），長辺・短辺方向の振動，およびその振動パターンからの二次分岐としてトーラス分岐（Neimark-Sacker 分岐）が起こりうることを証明した．すなわち，アトラクタの間欠的な変化は長辺方向・短辺方向の振動の位相ロッキングに対応し，その起源は静止状態の不安定化にあることがわかった．対称性を伴う Hopf-Hopf 分岐に起因するこの結果は，他の領域形状においても同様の解析手法が適用可能であることと自己駆動力を生み出すメカニズムに依存しない普遍性の存在を示唆しており，その検証は今後の課題である．

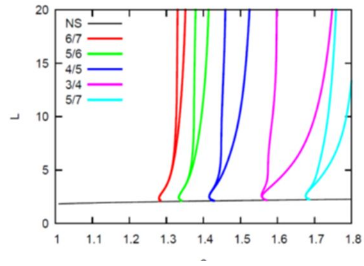

図 4 アーノルドの舌（雑誌論文 2）

(2) 準周期的不変閉曲線の数値的 path continuation の応用

前項で述べたトーラス分岐によって不変トーラスもまた，パラメータに対して連続的に依存するためさらなる理解のために path continuation を試みたいが，困難を伴う．連続力学系に対する 2 次元トーラスは Poincaré 写像を考えることで離散力学系の不変閉曲線に帰着する．これの path continuation を parametrization method[Jorba, 2001]で試みた．周期進行波をもつ偏微分方程式(modified Benney 方程式)に対してはこの方法で進行波から分岐するさざなみ立つ進行波(rippling rectangular wave)の path continuation に成功した（雑誌論文 1）．この場合は追跡するべき不変閉曲線上のダイナミクスが円周の rigid rotation と位相共役であるため，定式化がうまくいったが，非平衡ビリヤード問題においては上述の通り位相ロッキングが起きるため，この位相共役性が成り立たないため，新しい手法の開発が必要である．

(3) 数理モデリングに関する課題

正五角形以上の場合は内角が鈍角となるため，[Mimura et al., 2007]で述べられているような粒子モデルの導出方法（境界と対称な位置に仮想粒子を置く）の妥当性に疑問が残る．群論的分岐理論[Golubitsky et al., 1988]から従う系の対称性のみによる知見と樟脳円板モデルのパラメータとの対応を議論するため，妥当な粒子モデルの検討が課題である．現状，常微分方程式モデルを提案できておらず，離散力学系モデルを用いて研究した．与えられた条件をもつ周期軌道の存在と安定性を議論するならば，離散力学系モデルは比較的扱いやすく，強力である．ただし，領域サイズが十分に大きい極限における運動に対応していることから，有限サイズの粒子モデルと異なる様相を示すことがあることがわかった．たとえば，長方形領域における長方形状の周期アトラクタは粒子モデル離散力学系モデル双方に対応物があっても，領域境界で丸みを帯びた粒子モデルの周期アトラクタで離散モデルに対応物が無いものがあることがわかった．各モデルは領域や粒子のスケールに対応しているが，各モデル間での対応関係は今後詳細に研究する必要がある．

正三角形領域における運動方程式の研究を行ったところ，この場合は矩形領域よりも解構造が複雑であり，複数のアトラクタ・リペラが同一パラメータで多数共存するようである．その理解には力学系全構造解析手法を精密に適用することが有効だと考えられるが，その全容の解明には未だ至っていない．離散力学系モデルを援用しての研究が役立つと考えるが，前述の通り，注意するべき点もある．離散モデルでは入射角反射角の関係式自体を系のパラメータとして与えることになるが，その選び方によっては，鋭角な領域境界に入射すると決して脱出できなくなる場合があることがわかった．一方で，粒子モデルや偏微分方程式モデルであれば，現象論的には，必ず反射が起こると考えられる．このような不整合が微分方程式モデルから導かれる入射角・反射角の関係式では起こりえないかどうかなど検討が必要である．

＜引用文献＞

[Chen et al., 2009] X. Chen, S.-I. Ei, and M. Mimura. Self-motion of camphor discs. model and analysis. *Netw. Heterog. Media* 4 (2009) 1-18.

[Protière et al., 2006] S. Protière, A. Boudaoud, and Y. Couder. Particle-wave association on a fluid interface. *J. Fluid Mech.* 554 (2006) 85-108.

[Ei et al., 2006] S.-I. Ei, M. Mimura, and M. Nagayama. Interacting spots in reaction diffusion systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 14 (2006) 31-62.
[Prati et al, 2011] F. Prati, L.A. Lugiato, G. Tissoni, and M. Brambilla. Cavity soliton billiards. *Phys. Rev. A* 84 (2011) 053852.
[Mimura et al., 2007] M. Mimura, T. Miyaji, and I. Ohnishi, A billiard problem in nonlinear and nonequilibrium systems, *Hiroshima Math. J.* 37 (2017) 343-384.
[Arai et al., 2009] Z. Arai et al., A Database Schema for the Analysis of Global Dynamics of Multiparameter, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.* 8 (2009) 757-789.
[Koyano et al., 2015] Y. Koyano, N. Yoshinaga, and H. Kitahata, General criteria for determining rotation or oscillation in a two-dimensional axisymmetric system, *J. Chem. Phys.* 143 (2015) 014117.
[Jorba, 2001] À. Jorba, Numerical computation of the normal behaviour of invariant curves of n-dimensional maps. *Nonlinearity* 14 (2001) 943-976.
[Golubitsky et al., 1988] M. Golubitsky, I.N. Stewart and D.G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory: Vol. II.*, Springer-Verlag, New York, 1988.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）

1. Tomoyuki Miyaji, Toshiyuki Ogawa, and Ayuki Sekisaka, Rippling rectangular waves for a modified Benney equation, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 35 (2018), 939–968. 査読有 doi: 10.1007/s13160-018-0304-1
2. Tomoyuki Miyaji, Arnold tongues in a billiard problem in nonlinear and nonequilibrium systems, *Physica D* 340 (2017) 14–25. 査読有 doi: 10.1016/j.physd.2016.09.003

〔学会発表〕（計 10 件）

1. Tomoyuki Miyaji, Billiard-like motions of a self-propelling rigid disk, 京都大学数理解析研究所共同研究「反応拡散方程式伝播現象と特異性の解析および諸科学への応用」, 2018 年
2. 宮路智行, 自発的に運動する樟脳円板のビリヤード的運動について, 第 79 回岐阜数理科学セミナー, 2018 年
3. Tomoyuki Miyaji, Billiards in nonequilibrium systems, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2018, 2018 年
4. 宮路智行, 非平衡ビリヤード問題, 2018 年軽井沢グラフと解析研究集会, 2018 年
5. 宮路智行, 非平衡ビリヤード問題におけるアーノルドの舌, 摂南大学第４回数理セミナー, 2017 年
6. Tomoyuki Miyaji, A billiard problem in systems far from equilibrium, MIMS International Conference on "Reaction-diffusion system, theory and applications", 2017 年
7. 宮路智行, A billiard problem arising in systems far from equilibrium, 富山大学理学部数学科 2017 年度第 6 回談話会
8. Tomoyuki Miyaji, Resonance tongues appearing in a billiard problem under nonlinear and nonequilibrium conditions, International Conference Patten and Waves 2016, 2016 年
9. Tomoyuki Miyaji, Bifurcation analysis for a billiard problem in nonlinear and nonequilibrium systems, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016 年
10. 宮路智行, Bifurcations in a billiard problem under nonlinear and nonequilibrium conditions in a rectangular domain, NSC Seminar in Sendai, 2016 年

６．研究組織