様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：３２６６３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７６５１

研究課題名（和文）大規模な連立非線形楕円型偏微分方程式の解の存在性を検証する計算機援用証明法の開発

研究課題名（英文）Development of a computer-assisted proof method to verify the existence of solutions for systems to large-scale nonlinear elliptic partial differential equations

研究代表者
関根　晃太（Sekine, Kouta）

東洋大学・情報連携学部・助教

研究者番号：８０７３２２３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，大規模な連立楕円型偏微分方程式の境界値問題の解の計算機援用証明法の開発を目指し，研究を進めた．特に，計算機援用証明法の最も難しいパートである線形化作用素の逆作用素のノルム評価は既存の手法では大規模な連立偏微分方程式に適用すると誤差が大きくなり，実用的なものではなかった．
それに対し，ラプラス作用素の分数冪を利用することで大規模な連立楕円型偏微分方程式に対応する線形化作用素の逆作用素ノルム評価を得る手法を開発した．
これにより，今までは難しかった大規模な連立楕円型偏微分方程式の解の計算機援用証明法が可能となり，実際にLotka-Volterra方程式などに応用した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
非線形偏微分方程式は様々な現象を記述し，現代科学への発展にはなくてはならないものである．しかし，非線形偏微分方程式は複雑であるため，その解が存在するかどうかすらわからない場合がある．そこで，計算機を利用した解の存在証明法は有効であることが知られている．解の存在性を示すことで，現象を表す偏微分方程式の妥当性を保証することが出来る．しかし，大規模な非線形偏微分方程式系となると複雑さは増し，今までの計算機援用証明法では解の存在を保証することができない例が多々存在した．
本研究成果で大規模な非線形偏微分方程式系に特化した手法を考案し，解の存在性を証明できる範囲の拡大に成功した．

研究成果の概要（英文）：In this study, we aimed at the development of a computer-assisted proof method for the solution of the boundary value problem of system for large-scale elliptic partial differential equations. In particular, the norm evaluation of the inverse operator of the linearized operator, which is the most difficult part of the computer-assisted proof method, is not practical because the existing method has large errors when applied to large-scale simultaneous partial differential equations.
We developed a method to obtain inverse operator norm evaluation of linearized operators corresponding to large-scale elliptic partial differential equations by using fractional operator of Laplacian.
As a result, the computer-assisted proof method of the solution of system for the large-scale elliptic partial differential equation that was difficult until now becomes possible, and it was actually applied to the Lotka-Volterra equation etc.

研究分野：精度保証付き数値計算

キーワード：計算機援用証明法　精度保証付き数値計算　楕円型偏微分方程式　数値解析

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式は様々な現象を記述する手段として利用されており，方程式の解を解くことで現象の理解につながる.しかし，多くの偏微分方程式は解析的に解くことができないため，コンピュータを用いた数値計算によって近似的に解くことで，様々な分野に利用されている.コンピュータが扱える計算は有限であり，偏微分方程式の解を厳密に解くためには無限回の計算を必要とするためにコンピュータでさえも厳密に求めることは叶わない.また，計算回数を有限回でとどめた場合に，偏微分方程式の真の解とは違う別の解を得てしまう問題もある.

そこで，計算回数を有限にとどめながら，真の解を包含する形で結果を得られる精度保証付き数値計算法が重要となる.偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算法は「真の解の存在」を証明したうえで，真の解と近似解の誤差を導出するため，計算機援用証明法とも呼ばれる.

偏微分方程式に対する計算機援用証明法は 1988 年に中尾充宏氏により開発され，多くの数学的な結果を導いている.

２．研究の目的

本課題では大規模な連立非線形楕円型偏微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f_1(u_1,\cdots,u_N) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta u_2 = f_2(u_1,\cdots,u_N) & \text{in } \Omega, \\ \cdots & \cdots \\ -\Delta u_N = f_N(u_1,\cdots,u_N) & \text{in } \Omega, \\ u_1 = u_2 = \cdots = u_N = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の存在性を証明する計算機援用証明法を開発する．すなわち，未知変数の数，非線形項の形によらない楕円型偏微分方程式の解に対し存在性を証明することできる手法を考案することである．この目的が達成されることにより，Gray-Scott 方程式や Lotoka-Volterra2 種競合モデルなどの解の存在が証明できていない方程式の定常解の存在を明らかにできる.

その中でも，明らかにする内容として，偏微分方程式に対応する線形化作用素の逆作用素の存在性の証明とそのノルム評価が最も重要な課題である.

３．研究の方法

計算機援用存在証明法を構築するためには大きくわけて「数学的な証明」と「コンピュータ上で誤差を把握できるプログラムの実装」の 2 つのパートにわかれる.

数学的な証明を行うパートでは，主に研究代表者が自分で証明を行い，その結果を学会などで発表することで証明の正しさや，さらなる発展について議論した.

続いて,「コンピュータ上で誤差を把握できるプログラムの実装」についても，研究代表者自身が実装を行った.実装では誤差の計算を間違うことは一切許されないため,学会発表ではなく,Web で全世界にプログラムを公開することで，多くの利用者を募りバグ等の発見を務めた.また,開発したプログラムは BSD ライセンスとして，誰でも別の研究で利用できる状態にした.

４．研究成果

目的を達成するために最も重要な点は，楕円型偏微分方程式系の線形化作用素の逆作用素の存在性の証明法とそのノルム評価である.そのために,今までこの分野では利用されてこなかったラプラス作用素の分数冪を導入することで，線形化作用素の逆作用素の存在性とそのノルム評価を行うための問題を無限次元固有値問題に帰着できる次の定理を証明した.

定理

A を Dirichlet 境界条件付きのラプラス作用素とし，Q を $L^2(\Omega)$ 上の有界線形作用素とする．$L := A - Q$ としたとき，固有値問題

$$(u,v)_{H_0^1} - ((Q+Q^*)u,v)_{L^2} + (A^{-1}Q^*u, Q^*, v)_{L^2} = \lambda(u,v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

を満たす最小固有値 $\lambda_1 \geq 0$ が 0 を含まなけれ，線形作用素 L は正則で

$$\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2,H_0^1)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

となる.

その上で,無限次元固有値問題の固有値を劉-大石の定理に基づいたコンピュータで粗い包含を得る手法と，その粗い包含を Goerish の方法により精密化することで，非常に精度の良い評価が得られる手法を開発した.

その結果，今までの評価では対応できなかった楕円型偏微分方程式系への計算機援用証明法への応用が可能となった.

実際に,提案した手法を Lotka-Voltera 方程式に対して,適用すると図 1 の近似解に対して,計算機援用存在証明法により解の存在性が証明できた.

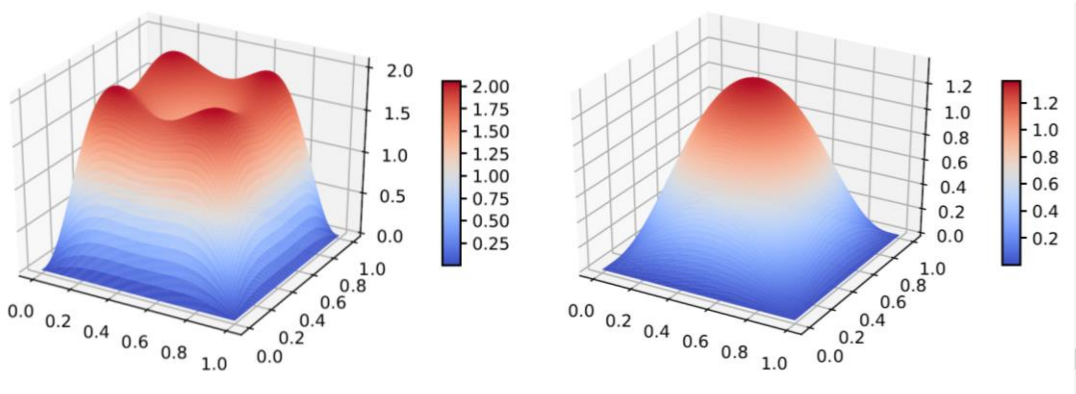

図 1. Lotka-Volterra 方程式の近似解

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 5 件）

[1] Makoto Mizuguchi, Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, and Shin'ichi Oishi: “Estimation of Sobolev embedding constant on a domain dividable into bounded convex domains”, Journal of Inequalities and Applications, 2017:299, pp.1-18, Nov., 2017, 査読あり

[2] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, Makoto Mizuguchi, and Shin'ichi Oishi: “Sharp numerical inclusion of the best constant for embedding ¥(H_{0}^{1}(¥Omega)¥hookrightarrow L^{p}(¥Omega)¥) on bounded convex domain, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.311, pp.306-313, Feb., 2017, 査読あり

[3] 田中一成, 関根晃太, 大石進一, ”楕円型微分方程式の正値解に対する精度保証付き数値計算法”, RIMS 講究録 第 2037 巻 2017 年 pp. 125-140, 査読なし

[4] 関根晃太, 田中一成, 大石進一, ”ある無限次元固有値を用いた楕円型偏微分方程式の解の存在性に対する計算機援用証明法”, RIMS 講究録 第 2037 巻 2017 年 pp. 96-105, 査読なし

[5] 関根晃太, 田中一成, 大石進一, ”有界な凸領域における連立楕円型偏微分方程式の解の計算機援用存在証明法”, Proceedings of the Twenty-Eighth RAMP Stmposium, Nigata University, 2016 年, pp.77-94, 査読なし

〔学会発表〕（計 24 件）

[1] 水口信, 関根 晃太, 中尾充宏 "半線形熱方程式の解の精度保証付き数値計算法について", 第 2 回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会, 広島インテリジェントホテル スタジアム前 (本館), (2018/12/1)

[2] 関根晃太, 中尾 充宏 "線形化作用素の逆作用素のノルム評価を利用しない楕円型偏微分方程式の解に対する計算機援用証明法", 第 2 回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会, 広島インテリジェントホテル スタジアム前 (本館), (2018/12/1)

[3] Makoto Mizuguchi, Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, and Shin'ichi Oishi: "Estimation of Sobolev embedding constant on a bounded convex domain", 18th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerics (SCAN'2018), Tokyo (2018/9/14)

[4] 関根晃太, "偏微分方程式の解の計算機援用存在証明法のための C++を用いた精度保証付き数値計算ライブラリの構築", 第 59 回プログラミング・シンポジウム, (講演日:2018/1/20)

[5] 関根晃太, "C++11 によるポリシーを導入した数値線形代数クラスの作成とその応用", 第 1 回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会, 北九州 西日本総合展示場, (2017/12/9)

[6] 若山馨太, 金子直樹, 田中一成, 関根晃太, 尾崎克久, 大石進一, ”前処理ソート付き逐次添

加法によるドロネー性保証付き三角形分割法”, 2017 年日本応用数理学会年会, 武蔵野大学, (2017/9/6)
[7] Ryo Kobayashi, Kouta Sekine, Masahide Kashiwagi, and Shin'ichi Oishi: “Verified numerical integration for function with power-type singularity using partial integration”, The International Workshop on Numerical Verification and its Applications (INVA2017), Miyako Island in Okinawa, (2017/3/17).
[8] Makoto Mizuguchi, Kouta Sekine, and Shin'ichi Oishi: “A numerical verification method for solutions to systems of parabolic equations”, The International Workshop on Numerical Verification and its Applications (INVA2017), Miyako Island in Okinawa, (2017/3/17).
[9] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, Makoto Mizuguchi, and Shin'ichi Oishi: “Numerical method for estimationg the best constant in Sobolev type inequality on unit square”, The International Workshop on Numerical Verification and its Applications (INVA2017), Miyako Island in Okinawa, (2017/3/17).
[10] Ryo Kobayashi, Kouta Sekine, Masahide Kashiwagi, and Shin'ichi Oishi: “Verified quadrature for integrand with power-type singularity using partial integral”, ANZIAM 2017, Adelaide in Australia, (2017/2/6).
[11] 関根晃太, 田中一成, 大石進一, "ある無限次元固有値を用いた楕円型偏微分方程式の解の存在性に対する計算機援用証明法", RIMS 講究録, (講演日:2016/10/21)
[12] 田中一成, 関根晃太, 大石進一, "楕円型微分方程式の正値解に対する精度保証付き数値計算法", RIMS 講究録, (講演日:2016/10/21)
[13] 関根晃太, 田中一成, 大石進一, "有界な凸領域における連立楕円型偏微分方程式の解の計算機援用存在証明法", RAMP Stmposium, Nigata University, (2016/10/13)
[14] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, and Shin'ichi Oishi: "On verified numerical computation for positive solutions to elliptic boundary value problems", 17th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerics (SCAN'2016), Sweden (2016/9/28).
[15] Kouta Sekine, Kazuaki Tanaka, and Shin'ichi Oishi: "A norm estimation for an inverse of linear operator using a minimal eigenvalue", 17th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerics (SCAN'2016), Sweden (2016/9/28).
[16] Yusuke Morikura, Yusuke Nozawa, Kouta Sekine, Masahide Kashiwagi, and Shin'ichi Oishi: "Fast enclosure for matrix multiplication on a GUP", 17th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerics (SCAN'2016), Sweden (2016/9/27).
[17] 小林領, 関根晃太, 柏木雅英, 大石進一, ” 部分積分と Euler-Maclaurin の公式を用いたベキ型特異点を持つ関数の精度保証付き数値積分”, 2016 年日本応用数理学会年会, 北九州国際会議場, (2016/9/14).
[18] 森倉悠介, 野澤優介, 関根晃太, 柏木雅英, 大石進一, ”CUDA の丸めモード指定演算を用いた行列積の高速な包含方法”, 2016 年日本応用数理学会年会, 北九州国際会議場, (2016/9/14).
[19] 水口信, 関根晃太,大石進一, ” Lotka-Volterra 型偏微分方程式の初期値境界値問題の解に対する精度保証付き数値計算法について”, 2016 年日本応用数理学会年会, 北九州国際会議場, (2016/9/14).
[20] 若山馨太, 田中一成, 関根晃太, 尾崎克久, 大石進一, ” Delaunay 三角形分割の精度保証付き数値計算手法に対する考察(ポスター講演)”, 2016 年日本応用数理学会年会, 北九州国際会議場, (2016/9/13)(優秀ポスター賞を受賞).
[21] 木村翔矢, 関根晃太, 大石進一, ” 一次元領域における非線形各参考を伴う方程式の定常解に対する精度保証付き数値計算法(ポスター講演)”, 2016 年日本応用数理学会年会, 北九州国際会議場, (2016/9/13)(優秀ポスター賞を受賞).
[22] Kouta Sekine, Kazuaki Tanaka, and Shin'ichi Oishi: “Estimation for optimal constant satisfying an inequality for linear operator using minimal eigenvalue”, Nonlinear Analysis and Optimization(NAO-Asia 2016), Toki Messe in Niigata, (2016/8/2).
[23] Makoto Mizuguchi, Kouta Sekine, Akitoshi Takayasu, Takayuki Kubo, and Shin'ichi Oishi: “Verification algorithm for enclosing a mild solution of semilinear heat equations”, Nonlinear Analysis and Optimization(NAO-Asia 2016), Toki Messe in Niigata, (2016/8/2).
[24] Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, and Shin'ichi Oishi: "Numerically verifiable condition for positivity of solution to elliptic equation", The 11th East Asia SIAM Conference, University of Macau, China (2016/6/20).

〔図書〕（計 2 件）
[1] 精度保証付き数値計算の基礎, コロナ社出版, 2018 年, 8 章の著者: 劉雪峰, 関根晃太, pp.196-246

[2] 計算科学のための HPC 技術 1, 大阪大学出版, 2017 年, 11 章の著者:S.Oishi, Y.Morikura, K.Sekine, H.Kuroda, M.Nakata, pp.249-273

〔その他〕
開発したソフトウェアのホームページ:
https://verified.computation.jp

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：