1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １７ 日現在

機関番号：５２５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７６５３
研究課題名（和文）超準モデルと理論における証明構造の分析

研究課題名（英文）Research of the structure of proofs in nonstandard models and formal theories

研究代表者
倉橋　太志（Kurahashi, Taishi）

木更津工業高等専門学校・基礎学系・講師

研究者番号：１０７３８４４６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：証明可能性述語の構文論的，意味論的な分析を通じて，形式的体系における証明および証明可能性の構造及び性質の解明を目指す研究を行った．様相論理と算術的解釈に基づく証明述語や証明可能性述語の分析，超準的な証明可能性述語の構成を行うことによる形式的証明構造の分析，第二不完全性定理の網羅的な分析，などを通じて，不完全性定理周辺の状況に一定の見通しを与えることができた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
証明可能性述語の性質の分析を通じて形式的証明の構造を理解するという研究が Goedel による不完全性定理の証明以降に盛んに行われてきたが，これまで十分には議論されていないような基本的な事項も多い．こうした状況下で，証明可能性述語の基本的な振る舞いについて多角的な視点で根本的な分析をするという研究を行い，一定の成果を得ることができた．これにより形式的体系の証明可能性や証明の構造に関する理解に向けた，ある程度の前進ができたといえる．

研究成果の概要（英文）：Through the syntactic and semantic analysis of provability predicates, I studied the structure and the nature of formal proofs and provability. Through the analysis of provability predicates based on modal logics and arithmetical interpretations, the analysis of structures of formal proofs by constructing nonstandard provability predicates, and the analysis of the second incompleteness theorem, I could have a certain perspective to the situation around the incompleteness theorems.

研究分野：数理論理学

キーワード：数理論理学　数学基礎論　不完全性定理　形式的算術　証明可能性述語　証明可能性論理　算術のモデル　様相論理

１．研究開始当初の背景

Gödel によって証明された不完全性定理は形式的体系の証明可能性に関する数理論理学における重要な定理であり，理論 T の不完全性に関する第一不完全性定理と，T の無矛盾性を表す文 Con(T)の証明不可能性に関する第二不完全性定理からなる．不完全性定理の証明には”x は理論 T において証明可能である”という関係を表現する論理式 Pr(x)（証明可能性述語）を用いることが本質的である．証明可能性述語の性質の分析を通じて，不完全性定理および形式的証明の構造を理解するという研究が Gödel 以降に盛んに行われてきた．例えば証明可能性述語の性質を様相論理を用いて分析するという研究がかなりの成果をあげており，様相論理が形式的体系の証明可能性を分析するツールとして非常に有用であることが分かっている．また，証明可能性述語の様々な性質は証明の概念の形式化に大きく依存すること，算術の超準モデルにおける証明構造の分析に Rosser による証明可能性述語が有用であること，などが分かってきた．一方，異なる形式化を行うことによる影響のような基本的な事項に関してさえこれまで曖昧にしか議論されていないことも多い．

２．研究の目的

証明可能性述語の構文論的，意味論的振る舞いを分析することで，不完全性定理の位置づけや役割，そして形式的証明可能性および形式的証明の構造及び性質を理解することが本研究の目的である．

３．研究の方法

証明可能性述語の構文論的，意味論的な分析を中心にして，理論やモデルにおける証明可能性と証明構造に関する分析を行った．研究は一人で考えるだけではなく，得られた成果をもとにして国内外の研究者と議論をする中でさらに進めることも重要であり，実際に神戸大学の菊池誠准教授，岩田荘平氏，そして千葉大学の大川裕矢氏らと共同研究を行うことによって進めた．また，千葉大学の新井敏康教授，Utrecht 大学の Albert Visser 教授，New York 市立大学の Sergei Artemov 教授，　Gothenburg 大学の Blanck 氏などにアドバイスをもらいながら進めた．得られた結果は国内外の研究集会や学会等で発表を行い，論文として各学術雑誌において発表した．

４．研究成果

(1) 証明の論理 LP の算術的完全性定理の改良：

通常の証明可能性の様相論理は証明可能性述語 Pr(x)の様相演算子□としての振る舞いを分析するものであるが，Artemov (2001) による証明の論理 LP (Logic of Proofs) は証明述語 Prf(t, A)に対応する項 t:A （証明項)を扱う様相論理であり，その算術的完全性は Artemov 自身によって次の形のものが証明されている：任意の論理式 A について，LP で A が証明できることとすべての Δ_1 証明述語 Prf(x,y)とそれに基づくすべての算術的解釈 ＊ について PA で A^* が証明できることは同値である．この同値性において，Gödel による通常の証明述語を固定するだけでは定理が成立しないことが示せるため，全ての Δ_1 証明述語をはしらせる必要がある．これに関して次のように LP の算術的完全性定理を改良した．

① ある Δ_1 証明述語 Prf(x,y)が存在して，任意の論理式 A について，LP で A が証明できることと Prf(x,y)にもとづくすべての算術的解釈 ＊ について PA で A^* が証明できることは同値である．
② ある Σ_1 証明述語 Prf(x,y)と Prf(x,y)にもとづく算術的解釈 ＊ が存在して，任意の論理式 A について，LP で A が証明できることと PA で A^* が証明できることは同値である．

本研究は岩田荘平氏（名古屋大学，現神戸大学）との共同研究である．

(2) 不完全性定理の一般化：

Gödel の第一不完全性定理は「PA を含む Σ_1-健全かつ再帰的な理論からは証明も反証もできない Π_1 文が存在する」というものであるが，これは「PA を含む無矛盾かつ Δ_1-定義可能な理論 T について，真であるが T からは証明できない Π_1 文が存在する」という形で述べなおすことができる．理論 T の定理全体の集合を Th(T)と表すことにする．この形の第一不完全性定理は Jeroslow (1975) によって次のように拡張されている：「PA を含む無矛盾な理論 T について，Th(T)が $\Delta_2(\mathrm{N})$-定義可能ならば，真であるが T からは証明できない Π_1 文が存在する」．さらに Hájek (1977) によって次のように一般化されている：「PA を含む無矛盾な理論 T について，Th(T)が $\Delta_{n+2}(\mathrm{PA})$-定義可能ならば，真であるが T では証明できない Π_{n+1} 文が存在する」「PA を含む Σ_{n+2}-無矛盾な理論 T について，Th(T)が Π_{n+1}-定義可能ならば，真であるが T からは証明できない Π_{n+1} 文が存在する」．

本研究では Jeroslow と Hájek の結果を拡張した次の結果を証明した．

① PA を含む無矛盾な理論 T について，Th(T)が Π_{n+1}-定義可能ならば，真であるが証明できな

いΠ_n文が存在する
この定理によりHájek によって提起された問題を否定的に解決することができた．また，定理の系としてPAの本質的決定不可能性を拡張した次の結果が得られる．
② PAを含む無矛盾な理論Tについて，Th(T)はΠ_1-定義可能ではない．

(3) Sacchettiの様相論理における不動点を計算するアルゴリズム：
証明可能性の様相論理GLに対して不動点定理が成立することがde Jonghと Sambin(1976)によって独立に証明されている．Sacchetti(2001) はGLより弱い無限個の様相論理の族$wGL_n=K+\Box(\Box^n p\to p)\to\Box p$ を導入し，その不動点定理を証明した．Sacchetti による不動点定理の証明は各論理式に対する具体的な不動点の構成を与えるものではなかったため，不動点定理の構成的な証明という問題が提起されていた．本研究では Sacchetti の論理に対する具体的な不動点の構成を与えるような不動点定理の証明を与えることで Sacchetti の問題に対する肯定的な解答を与えた．すなわち

① wGL_nにおいて不動点定理が成立し，さらに不動点を計算するアルゴリズムがある．

本研究は大川裕矢氏（千葉大学）との共同研究である．

(4) Sacchetti の様相論理の算術的完全性：
通常の証明可能性述語に関して，様相論理GLに対する算術的健全性と完全性が成立することがSolovay(1976)によって示されている．Sacchetti (2001) は上述の各様相論理に対して，算術的健全かつ完全となるような超準的な証明可能性述語があるかという問題を提起した．本研究では次の定理を証明することによってSacchettiの問題を肯定的に解決した．

① 各n>1に対して，あるΣ_2証明可能性述語Pr(x)が存在して，任意の様相論理式Aについて，wGL_nでAが証明できることとPr(x)にもとづくすべての算術的解釈 * についてPAでA^*が証明できることは同値である．

(5) メタ理論を固定した場合の証明可能性論理の分類：
T の証明可能性述語 $Pr_T(x)$ について U において証明できる原理に関する命題証明可能性論理 $PL_T(U)$ が GL_α, GL_β^-, D_β, S_β（ただしβは補有限）で尽くされることが Beklemishev(1989) らによって示されている（分類定理）．本研究では U を固定して T を動かした際に $PL_T(U)$ がどのような論理になりうるのかを分析した．結果，次の定理が証明でき，可能なすべての状況がありうることが分かった．

① L を上記の論理の１つとし（ただしαはr.e.でβは補有限），U を PA のr.e.無矛盾拡大とすると，$I\Sigma_1$の無矛盾なr.e.拡大理論TとそのΣ_1定義$\tau(u)$が存在して，$PL_\tau(U)$がLと一致する．

(6) 様相命題論理に対する一様Lyndon補間定理：
様相命題論理に対するCraig補間性(CIP)はGabbayらによって1970年代に分析が始められた．CIPを強めた概念にLyndon補間性(LIP)と一様補間性(UIP)があり，様々な様相命題論理がこれらの性質を持つかどうかについては多くの研究が行われている．特に様相論理GLに対するCIPは Smoryński(1978) と Boolos(1979)が独立に示し，LIP は Shamkanov(2011)が，UIP は Shavrukov(1993)が示した．また様相論理 Grz に対する CIP は Boolos(1980)が，LIP は Maksimova(2014)が，UIPはVisser(1996)が示した．このように特にLIPとUIPはこれまで個別に議論されており，統一的に議論する枠組みはなかった．
まず本研究では様相論理Lが一様Lyndon補間性(ULIP)をもつ，という概念を導入し，その基本的な性質を調べ，そして様々な様相論理が ULIP をもつことを証明した．

① LがULIPをもてば，LはLIPとUIPをともにもつ．したがって，ULIPの概念はLIPとULIを統一的に議論するための枠組みを提供することができている．
② Lがlocally tabularでLIPをもつならば，LはULIPをもつ．つまりK5の拡張LについてLIPとULIPは同値．よってK5，KD5，K45，KD45，KB5，S5はULIPをもつ．
③ LがULIPをもち，Xが命題変数を含まない様相論理式の集合とすると，L+XもULIPをもつ．
④ K，KD，KT，KB，KDB，KTB はULIPをもつ．
⑤ GLとGrzはULIPをもつ．特にGLとGrzのuniform interpolantがVisserによって与えられたものより複雑さの低いものとしてとれる．

特にKB，KDB，KTBのUIPもこれまでに知られていない結果である．また証明可能性の様相命題論理 GL 及び Grz に対する今回の結果からこれまでに知られている結果が全て系として導かれる．

(7) Rosser 証明可能性述語に対する様相論理：
Rosser 証明可能性述語に対しては第二不完全性定理が成立しないことが古くから知られており，したがって Rosser 証明可能性述語に対応する様相論理は GL とは大きく異なるものになる．しかしGuaspari and Solovay(1979) が示す通り，Rosser 証明可能性述語に対応する様相論理は一般には正規様相論理とはならない．一方 Arai(1990)は対応する様相論理が正規様相論理となる Rosser 証明可能性述語が存在することを示している．その場合，対応する様相論理は KD=¬□⊥を含む．本研究では対応する様相論理が正規様相論理になるような Rosser 証明可能性述語について分析し，次の２つの結果が得られた．

① 対応する様相論理がちょうど様相論理 KD と一致するような Rosser 証明可能性述語が存在する．
② 対応する様相論理が KDR=KD+□¬p→□¬□p を含むようなRosser 証明可能性述語が存在する．特にこの場合，対応する様相論理が KD を真に含んでいる．

(8) Rosser 証明可能性述語と導出可能性条件：
上述のArai(1990)の結果は，「D2を満たすRosser証明可能性述語が存在する」と述べることができる．さらにAraiは「D3を満たすRosser証明可能性述語が存在する」ことも証明している．本研究ではさまざまな導出可能性条件を満たすRosser証明可能性述語の構成を行うことでAraiによる結果を拡張した．

① $D2^G$，Δ_0C^Gを満たすRosser証明可能性述語が存在する．
② CB，D2，Δ_0C^Gを満たすRosser証明可能性述語が存在する．
③ CB，B_2，$D3^G$，Δ_0C^Gを満たすRosser証明可能性述語が存在する．

特に2，3番目の構成はHilbert-Bernaysの条件を満たすものであり，Hilbert-Bernaysの条件だけでは無矛盾性を表す文¬Pr(0=1)の証明不可能性を導けるわけではないことがわかる．

(9) 証明可能性述語と導出可能性条件：
Gödel による第二不完全性定理は「PA を含む無矛盾かつ再帰的な理論 T からは無矛盾性を表す文Con(T)が証明できない」というものであるが，Gödelは証明の方針を述べただけであり，実際にその方針通りに証明を実行するならば，証明可能性述語が多くの自然な性質を満たすことを確認する必要がある．これを実行したのはHilbert-Bernays(1939)であるといわれている．実際，Hilbert-Bernaysは第二不完全性の証明のために証明可能性述語が満たすべき十分条件（導出可能性条件）を提示し，実際に Gödel の証明可能性述語がこれらの性質を満たすことを示した．Löb(1955)はHilbert-Bernaysによる条件よりも簡潔な条件を与え，第二不完全性定理の証明のための見通しの良い枠組みを提供した．それ以降，第二不完全性定理のための十分条件はJeroslow(1973)，Montagna(1979)，Buchholz(1993)によって与えられている．これらの条件はいずれも無矛盾性を表す文の証明不可能性を導くものであるが，厳密にはそれぞれの条件から証明不可能性が導かれる無矛盾性を表す文は異なっており，したがって得られる結論も当然異なっている．こうした混沌とした状況の見通しをよりよくするために，証明可能性と導出可能性条件に関する分析を行った．そして次の結果が得られた．

① Hilbert-Bernays の採用した無矛盾性$\forall x(\mathrm{Fml}(x)\wedge \mathrm{Pr}(x)\to\neg \mathrm{Pr}(\neg x))$の証明不可能性を導く新たな十分条件を発見した．すなわち，証明可能性述語Pr(x)がB_2とD3，もしくはPCをみたせば，$\forall x(\mathrm{Fml}(x)\wedge \mathrm{Pr}(x)\to\neg \mathrm{Pr}(\neg x))$は証明できない．
② 条件の組 $\{B_2,CB,\Delta_0C^U\}$，$\{D1,B_2,D3\}$，$\{D1,\Sigma_1C\}$，{D1,PC}は互いに独立であり，いずれもLöbの条件から証明不可能性が導かれる無矛盾性¬Pr(0=1)の証明不可能性のためには十分ではない．
③ グローバルなLöbの条件を満たすが，Gödelの採用した無矛盾性$\exists x(\mathrm{Fml}(x)\wedge\neg \mathrm{Pr}(x))$が証明できるような$\Sigma_1$証明可能性述語が存在する．すなわち，Hilbert-BernaysおよびLöbの導出可能性条件を導いた第二不完全性定理は，厳密にはGödelによる第二不完全性定理の主張を実現できていないことがわかる．
④ Σ_1証明可能性述語がD1とB_2^Uを満たせばΣ_1C^Uを満たす．これはBuchholz(1993)による，証明可能性述語が$D1^U$と$D2^U$を満たせばΣ_1C^Uを満たす，という結果の拡張となっている．更に，D1とB_2^U を満たすがD2を満たさないΣ_1証明可能性述語の存在を示すことで，今回の結果がBuchholzの結果の真の拡張となっていることも示した．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計７件）
樋口幸治郎・倉橋太志，計算可能前構造と横山吉川の性質，京都大学数理解析研究所講究録，vol. 2050, pp. 24-40, 2017.

Makoto Kikuchi and Taishi Kurahashi, Generalizations of Gödel's incompleteness theorems for Σn-definable theories of arithmetic, The Review of Symbolic Logic, vol. 10, no. 4, pp. 603-616, 2017.

Taishi Kurahashi, Arithmetical completeness theorem for modal logic K, Studia Logica, vol. 106, no. 2, pp. 219-235, 2018.

Taishi Kurahashi, On partial disjunction properties of theories containing Peano arithmetic, Archive for Mathematical Logic, vol. 57, no. 7-8, pp. 953-980, 2018.

Taishi Kurahashi, Arithmetical soundness and completeness for $\Sigma 2$ numerations, Studia Logica, vol. 106, no. 6, pp. 1181-1196, 2018.

Taishi Kurahashi, Provability logics relative to a fixed extension of Peano Arithmetic, The Journal of Symbolic Logic, vol. 83, no. 3, pp. 1229-1246, 2018.

Sohei Iwata and Taishi Kurahashi, On arithmetical completeness of the Logic of Proofs, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 170, no. 2, pp. 163-179, 2019.

〔学会発表〕（計15件）
倉橋太志，不完全性定理と証明可能性述語について，日本数学会2016年度秋季総合分科会（特別講演）（招待講演），2016年9月，関西大学.

倉橋太志，PAを含む理論の部分的な選言特性と存在特性，日本数学会2017年度年会，2017年3月，首都大学東京.

岩田荘平・倉橋太志，LPの算術的完全性定理について，日本数学会2017年度年会，2017年3月，首都大学東京.

倉橋太志，On partial disjunction properties of theories containing PA, Workshop "Logic and Philosophy of Mathematics"(招待講演)，2017年7月，早稲田大学.

倉橋太志，Two theorems on provability logics, Logic Colloquium 2017, 2017年8月，Stockholm-Sweden.

倉橋太志，第一不完全性定理の拡張と一般化について，日本数学会2017年度秋季総合分科会，2017年9月，山形大学.

倉橋太志，Sacchettiの論理に対する算術的健全性と完全性，日本数学会2017年度秋季総合分科会，2017年9月，山形大学.

倉橋太志，Rosser証明可能性述語と超準的な証明，超準解析と数学基礎論のシンポジウム NSA 2017(招待講演)，2017年12月，早稲田大学.

倉橋太志，Normal modal logics and provability predicates, Second Workshop on Mathematical Logic and its Applications, 2018年3月，金沢.

倉橋太志，理論の分解と証明可能性論理，日本数学会2018年度年会，2018年3月，東京大学.

倉橋太志，Rosser provability and the second incompleteness theorem, Symposium on Advances in Mathematical Logic 2018 (Takeuti Memorial Symposium), 2018年，神戸大学.

倉橋太志，様相論理KDの算術的完全性，日本数学会2018年度秋季総合分科会，2018年9月，岡山大学.

倉橋太志，命題様相論理における Uniform Lyndon 補間定理，第 6 回山陰基礎論・解析学研究集会，2019 年 2 月，米子．

倉橋太志，命題様相論理における uniform Lyndon interpolation property，日本数学会 2019 年度年会，2019 年 3 月，東京工業大学．

大川裕矢・倉橋太志，Sacchetti の様相論理に対する不動点定理について，日本数学会 2019 年度年会，2019 年 3 月，東京工業大学．

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者 なし