

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 18 日現在

機関番号：12604

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K21022

研究課題名（和文）数学的モデル化における仮定設定能力の実態解明とその育成に関する研究

研究課題名（英文）A Study on Development of Assumption Setting Ability in Mathematical Modeling

研究代表者

清野 辰彦（SEINO, Tatsuhiko）

東京学芸大学・教育学部・准教授

研究者番号：00550740

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、仮定の意識化と設定に関わる能力の育成に関する数学的モデル化の学習指導を構築し、その有効性を実証することである。得られた1つ目の成果は、仮定の設定に関する能力に関わる数学的モデル化能力を同定したことである。2つ目の成果は、「現実の世界」と「数学の世界」を結びつける際の見方の1つである「みなす」見方を広げるための教材とその系列について明確にしたことである。3つ目の成果は、数学的活動における数学的モデル化過程と数学的問題解決過程がどのように関わり合いながら、解決が進んでいくのかについて明確にしたことである。4つ目の成果は、構築した学習指導が有効に働くことが見出されたことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

日常生活の問題から社会的な問題までの多様な問題に対して、数学という眼鏡を通して捉えたり、数学を活用して解決する能力、すなわち数学的モデル化能力の育成は、より一層重要になってきている。しかし、児童・生徒の実態をみると、数学的モデル化能力は十分に育成されているとはいえない。

それゆえ、数学的モデル化能力の育成は、数学教育における喫緊の課題である。本研究では、仮定の設定に関する能力を含む数学的モデル化能力を育成するための教材や学習指導について開発したことに最大の意義がある。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is to establish the learning and teaching of mathematical modeling to promote the abilities related to the consciousness and setting of the assumption, and to verify the effectiveness. The first result was the identification of mathematical modeling abilities related to the ability to set assumptions. The second result was the clarification of teaching materials and their sequence to broaden the "deem" perspective, one of the perspectives linking "real world" and "world of mathematics". The third result was the clarification of how mathematical modeling and mathematical problem solving in mathematical activities relate to each other in order to progress the solution. The fourth result was that it was found that the constructed learning and teaching works effectively.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学的モデル化 仮定 学習指導 割合

1. 研究開始当初の背景

知識・情報があらゆる場面で重要性を増す「知識基盤社会」の中で、児童・生徒が豊かに生きていくことができる能力や態度を身につけさせることが、教育の責務である。特に、これからの社会では、アイデアや知識を生み出す能力や問題を解決する能力の育成が必要となる。数学教育では、数学を活用して問題を解決する能力の育成が求められている。現実事象に関わる多種多様な問題に対して、数学を活用して解決する場合、図1の数学的モデル化過程(数学的モデリング)と呼ばれるプロセスを踏む(三輪、1983)。この一連のプロセスを数学の学習の中で経験させ、プロセスを遂行する能力を育成するとともに、数学の有用性に関する数学観を育むことが、数学教育上の課題である。この課題の解決に向けて取り組まれている数学的モデル化の学習指導に関する研究は、1980年前後以降、大学教育から始まり、徐々に、校種を拡充させて、展開されてきている。実際、1983年から2年おきに ICTMA(International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications)という数学的モデル化や応用に焦点をあてた国際会議が開催され、議論が行われてきている。我が国においても、研究が蓄積されてきてはいるが、OECD が行う PISA といった国際調査や全国学力・学習状況調査の結果を見ると、現実事象の問題を解決することに困難性がある児童・生徒が多く、その実態の改善に向けて、さらなる研究が必要である。

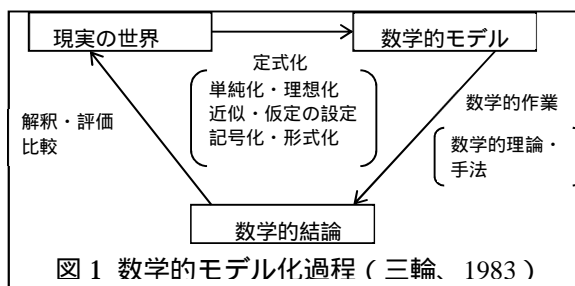


図1 数学的モデル化過程(三輪、1983)

筆者は、2011年度から3年間、科学研究費補助金の助成のもと、「数学的モデル化の能力と態度の育成に関する研究」に取り組んできた。この研究の目的は、数学的モデル化の能力と態度を明確にするとともに、数学的モデル化の能力と態度を育成するための学習指導の構築であった。研究成果の一部は、清野(2011、2012(a)、2012(b)、2013)において、日本数学教育学会誌を中心に発表してきた。研究を進め、授業化に取り組んでいる中、数学的モデル化教材に取り組む生徒の様子を観察していると、定式化のプロセス、特に、仮定の設定でつまずく生徒が多く、それができないために、それ以降の考察が進められない実態を目の当たりにしてきた。仮定の設定に困難性があることは、これまでの調査研究においても指摘されてきているが(長崎他、2001;清水他、2012)その実際は、より深刻に感じられた。こうした実態を改善するためには、文脈の中で仮定を明確に指摘できる能力の育成からはじまり、仮定設定能力の育成までの組織的、継続的な研究が必要であると考えように至った。

また、現実事象の問題解決では、様々な場面で、データの比較・分析が行われるが、その際、重要なはずなのに概念が割合である。割合は、小学校4年生から正式に学習されるが、学習したとしても、児童・生徒たちは、割合の理解に困難性を有していることが報告されている(例えば、全国学力・学習状況調査、TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study))。児童・生徒の割合の理解を深め、活用できる能力を育成していくことが極めて重要であると考え、この研究も着手していくことにした。

2. 研究の目的

本研究の目的は、仮定の意識化と設定に関わる能力の育成に関する数学的モデル化の学習指導を構築し、その有効性を実証することである。

3. 研究の方法

研究目的を達成するために、次の四つの課題を設定した。第一の課題は、先行研究における数学的モデル化の能力について考察し、仮定の設定に関する能力を含む数学的モデル化能力について同定することである。第二の課題は、数学的モデル化の能力の実態について全国学力・学習状況調査を基に明らかにするとともに、全国学力・学習状況調査では、どの能力が評価できていないかを明らかにすることである。第三の課題は、数学的モデル化過程を遂行していく際の重要な活動を明確にするとともに、数学的モデル化の学習指導を構築することである。第四の課題は、教材を開発するとともに、授業を実際に行い、構築した学習指導が有効に機能しうるかどうかを検討することである。

本研究では、第一の課題から第三の課題までの解決は、主として先行研究の文献解釈による理論的考察を研究方法とし、第四の課題の解決は、授業のプロトコル、児童・生徒の解決過程が記述されているノート及び生徒の学習感想の分析による実証的考察を研究方法とした。

4. 研究成果

以下では、本研究の主たる成果を5つに分けて記述する。

(1) 仮定の設定に関する能力を含む数学的モデル化能力の同定

1つ目の成果は、仮定の設定に関する能力を含む数学的モデル化能力を同定したことである。具体的には、数学的モデル化能力は、「A.定式化」「B.数学的处理」「C.解釈・評価」「D.全体」の

4つの局面に分けた上で、各局面において必要となる能力として同定した(表1参照)。また、同定した能力の枠組みに、全国学力・学習状況調査の「活用」に関する問題作成の枠組み(中学校)に示された「知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力」を位置づけ、今後評価していきたい評価項目について検討し、現実事象の問題解決を遂行するにあたって重要な能力である「A1.変数の特定」や「C2-3.数学的モデルの限界の明確化」などが、明確に位置付けられていないことを明らかにしたことである。

表1 数学的モデル化能力と全国学力・学習状況調査のとの対応

| 局面 | 能力 | | 全国学力・学習状況調査のαの位置 |
|--------------------|----------------------------|-------------------|------------------|
| A.定式化 | A1.変数の特定 | A1-1.変数の生成 | |
| | | A1-2.変数の選択 | |
| | | A1-3.変数と定数の区別 | |
| | | A1-4.変数の制御 | |
| | A2.問の特定 | | |
| | A3.変数間の関係の設定 | A3-1.変数間の関係の生成 | α1(3)、α3(2) |
| | A3-2.変数間の関係の選択 | α1(3)、α3(2) | |
| A4.仮定の設定 | A4-1.要素の単純化・理想化 | α1(3) | |
| | A4-2.数値の仮定 | | |
| | A5.事象における要素の特徴の把握 | α1(1)、α1(2) | |
| B.数学的処理 | B1.数学的記号・表現の使用 | B1-1.数学的記号・表現の理解 | |
| | | B1-2.異なる数学的表現への変換 | |
| | B2.数学的原理・法則を用いた数学的処理 | B2-1.数学的原理・法則の理解 | |
| | | B2-2.数学的原理・法則の使用 | |
| C.解釈・評価 | C1.結果の解釈 | C1-1.数学的結果の解釈 | α3(1) |
| | | C1-2.数学的モデルの解釈 | |
| | C2.結果の評価 | C2-1.数学的モデルの検証 | |
| | | C2-2.数学的モデルの改良 | |
| C2-3.数学的モデルの限界の明確化 | | | |
| D.全体 | D1.数学的モデル化過程に対するメタ知識の理解 | | |
| | D2.数学的モデル化過程のモニタリング・コントロール | | |

(2) 数理科学的意思決定の際に用いられる手法の整理と教材開発

2つ目の成果は、現実事象の問題解決の中でも、数理科学的意思決定に焦点をあて、数理科学的意思決定の際に用いられる手法を整理するとともに、1つの手法に焦点をあて、数理科学的意思決定力の育成を主眼にした小学校・中学校・高等学校の教材が開発可能であることを事例的に示したことである。数理科学的意思決定に有益となる手法を整理する枠組みの作成では、まず、手法を用いる目的を整理するために、数理科学に関わる、A.数学的モデル化、B.統計的探究、C.工学デザインプロセス、D.QCストーリーの4つのプロセスに焦点をあて、比較検討した。そして、手法を用いる目的を、意思決定を要する現実世界の問題を発見・設定する「問題の発見・設定」、選択肢を創出し合意形成を図る「定式化・分析」、選択肢の妥当性等を評価し決定をしたり、決定後の有効性を評価したりする「決定・評価」の3つに整理し、これらを手法を整理する枠組みの1つの観点とした。また、2つ目の観点は、個々の手法を整理するための観点であり、目的、活動、手法名とした。次に、数理科学的意思決定をする際に有益となる手法を、文献研究を通して抽出し、作成した枠組みを基に整理した(表2はその一部)。

表2 数理科学的意思決定の際に用いられる手法の整理

| 局面 | 目的 | 活動 | 手法 |
|----------|-----------------------------|---|----------|
| 問題の発見・設定 | 中心、バラツキ、異常値などの現状の量的把握をするために | 横軸に名義尺度(カテゴリ、番号など)を取り、1標本を1個の点で表現し、分布の特徴や異常値を読み取る | ドットプロット |
| | | 箱ひげ図を作成し、図や5数要約を基に、分布の特徴や異常値を読み取る | 箱ひげ図 |
| | | ヒストグラムを作成し、分布の特徴や異常値を読み取る | ヒストグラム |
| | | ヒストグラムの上の辺の中点を結んでできるグラフを作成し、分布の特徴を読み取る | 度数折れ線グラフ |
| | | レーダーチャートを作成し、複数の項目のバランスや特徴を読み取る | レーダーチャート |

そして、整理した表の中の指標化に焦点をあて、数理科学的意思決定力の育成を主眼にした小学校・中学校・高等学校の教材を開発した。開発した教材には、各々の価値観を表出させるとともに、達成しようとする価値を実現するための選択肢の列挙、価値に重み付けを施し、指標化や可視化などを通して最も目的に合致した選択肢の探究という共通性が見られた。また、現実世界で選出した解(価値)が納得できるものかを評価し、合意形成や意思決定を行う過程にも共通性が見られた。

(3) 「みなす」見方を広げるための教材とその系列

3つ目の成果は、「現実の世界」と「数学の世界」を結びつける際の見方の1つである「みなす」見方に焦点をあて、「みなす」見方を広げるための教材とその系列について明確にしたことである。具体的には、小学校6年、中学校1年、高校1年と学年が上がるにつれて、データの個数が増加し、個々のデータではなく、データを集団として捉える見方が必要になってくるように、教材の系列を考えた。児童・生徒にとって困難であるのは、集団として捉えるという「みなす」見方の拡大とともに、そのことによって、データとして存在しない点を通る直線を描くことである。この困難性を克服するためには、データを散布図に表現し、その全体の傾向を大局的に捉える学習を意識的に行っていく必要がある。また、目的変数とより強い関係がある説明変数を探し、その変数間の関係を考えるという活動や、回帰直線の上下に2(標準偏差)の幅で平行線を引き、予測値の誤差について考える活動もより一層行っていく必要があると考える。このことは、関数と統計の学習をより密接に関連付けながら学習していくことの必要性を示している。

(4) 数学的モデル化過程の進展の契機

4つ目の成果は、数学的活動における数学的モデル化過程と数学的問題解決過程がどのように関わり合いながら、解決が進展していくのかについて明確にしたことである。その際、施設配置問題に焦点をあて、想定される解決過程を示し、島田(1977)の数学的活動の枠組みを基に、解決過程を分析した。具体的には、以下の点が明確となった。現実事象の問題解決では、数学的モデル化過程の進行に伴い、問題が生成されることがあり、それらの問題を解決することによって、「類例」(島田ら、1977)が蓄積されていくことになる。蓄積された「類例」を「一般化・体系化」の視点で整理することが、数学的問題解決過程での活動となる。いくつかの現実事象の問題解決において、数学的モデル化過程の進行の際に用いられてきた方法を見直し、統合することが、数学的問題解決過程での活動となる。現実事象の問題解決の後、事象の仕組みをより理解するために、異なる数学的概念で再考察することは、数学的問題解決過程での活動となる。

(5) 二つの数量間の関係としての割合の意味理解を目指した導入授業の提案

5つ目の成果は、小学校第4学年に焦点をあて、二つの数量間の関係としての割合の意味理解を目指した導入授業を提案したことである。提案した授業の基本的な構想は、割合の素地に関する学習場面において潜在的であった割合を顕在化させることであり、パターンブロック間の関係を整数倍とその逆の分数倍で表現するとともに、基準量を1とみていく活動を潤沢に行い、同じ関係であるものを見つける活動を取り入れた。本研究では、提案した授業の有効性を、授業のプロトコル、および児童の学習感想を基に分析した。分析の結果、基準量を1とみることが、ブロックを活用することで無理なく児童から導き出されることが明らかにされた。また、操作を通じた関係の確認によって、ブロックの形を捨象して考え、数量間の関係へと着眼できるようになったことが明らかにされた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|--------------------|
| 1. 著者名 藤井育亮, 成田慎之介, 清野辰彦 | 4. 巻 100(10) |
| 2. 論文標題 数学的問題解決における日米共通調査再考:「マッチ棒の問題」の解決における式表現と擬変数に焦点を当てて | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 日本数学教育学会誌算数教育 | 6. 最初と最後の頁 2-15 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 清野辰彦 | 4. 巻 5 |
| 2. 論文標題 数学的モデル化能力の同定に関する一考察 | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 日本数学教育学会春期研究大会論文集 | 6. 最初と最後の頁 155-162 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-------------------|
| 1. 著者名 Tatsuhiko Seino, Colin Foster | 4. 巻 48(5) |
| 2. 論文標題 Why the details matter: Learning from Japanese Kyouzai Kenkyuu | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Mathematics in School | 6. 最初と最後の頁 2-8 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|--|--------------------|
| 1. 著者名 越後佳宏, 清野辰彦, 田中義久, 中野博之, 栗田辰一郎 | 4. 巻 101(10) |
| 2. 論文標題 割合の導入指導に関する一考察 - 関係としての割合の理解を目指して - | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 日本数学教育学会誌算数教育 | 6. 最初と最後の頁 2-12 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 清野辰彦 | 4. 巻 7 |
| 2. 論文標題 数学的モデル化過程と数学的問題解決過程の関わりに関する一考察 | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 日本数学教育学会春期研究大会 | 6. 最初と最後の頁 123-130 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 清野辰彦 | 4. 巻 6 |
| 2. 論文標題 「現実の世界」と「数学の世界」を繋ぐ見方に関する一考察 - 「みなす」見方を広げる教材 - | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 日本数学教育学会春期研究大会 | 6. 最初と最後の頁 179-184 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|---------------------|
| 1. 著者名 清野辰彦、青山和裕 | 4. 巻 6 |
| 2. 論文標題 学校教育における設計科学的視座に基づく数理科学教育に関する研究 - 数理科学的意思決定をする際に有益となる手法の抽出とその検討 - | 5. 発行年 2018年 |
| 3. 雑誌名 日本数学教育学会春期研究大会 | 6. 最初と最後の頁 35-40 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計2件

| | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1. 著者名 藤井斉亮先生ご退職記念論文集編集委員会編著 | 4. 発行年 2017年 |
| 2. 出版社 東洋館出版社 | 5. 総ページ数 358 (185-196) |
| 3. 書名 数学教育学の礎と創造 | |

| | |
|--|-----------------------------|
| 1. 著者名 大野桂（編著），清野辰彦，樋口万太郎，高橋丈夫，前田一誠，山本大貴，早川健，久下谷明，高橋正英，久保田健祐，岡部寛之，木下幸夫，平川賢，松山起也，森本隆史，小谷祐二郎，河内麻衣子，瀧ヶ平悠史，加固希支男，越後佳宏（分担執筆） | 4. 発行年 2017年 |
| 2. 出版社 学事出版 | 5. 総ページ数 112 (104-107) |
| 3. 書名 「資質・能力」を育成する算数科授業モデル | |

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|