

平成 31 年 4 月 27 日現在

機関番号：32619

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K21368

研究課題名(和文) ハングリー型離散・超離散可積分系の固有値問題への応用

研究課題名(英文) Application of discrete and ultradiscrete integrable systems of hungry type to eigenvalue problem

研究代表者

福田 亜希子 (Fukuda, Akiko)

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：70609297

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題ではまず、既存の可積分系を一般化した方程式を用いて、行列の固有値を精度良く計算する新しいアルゴリズムを開発した。さらに、既知の方程式とアルゴリズムに対して超離散化と呼ばれる極限操作を行うと、min-plus代数と呼ばれる通常の線形代数のものとは異なる固有値を計算できることが明らかとなった。Min-plus代数上の固有値は重み付き有向グラフにおける最小平均閉路重みに対応しており、グラフ上の最短経路問題の解法としての応用が期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

行列の固有値問題は振動解析や情報検索、主成分分析、各種コンピュータシミュレーションなど実用上様々な応用があり、高速高精度な計算が必要とされている。しかし、一般の大規模で非対称な行列の固有値を精度良く求めることは非常に難しい。本研究開発した新しいアルゴリズムは、対象となる行列のクラスは多少限定されるものの、相対誤差の意味で高精度に固有値を計算できる。また、超離散化と呼ばれるテクニックを用いて、min-plus代数上の固有値を計算する新しいアルゴリズムを開発した。本研究は超離散可積分系と固有値計算アルゴリズムの対応を示した初の結果である。

研究成果の概要(英文)：In this project, we first developed a new algorithm to compute eigenvalues of matrices with high accuracy, using equations that generalize existing integrable systems. Furthermore, we clarified that the limit procedure, called ultradiscretization, can be applied to compute eigenvalues on min-plus algebra, which is different from those of ordinary linear algebra. The eigenvalues on the min-plus algebra correspond to the minimum average weights of circuits in weighted directed graphs, and it is expected that it is applied for the shortest path problem on graphs.

研究分野：応用可積分系, 応用数学, 数値計算

キーワード：離散可積分系 超離散可積分系 超離散化 固有値 min-plus代数 箱玉系 保存量 totally nonnegative行列

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

複雑系に対比される概念である可積分系とは、多くの保存量をもち、初等関数や特殊関数を用いて解を具体的に書き下すことが可能な非線形力学系の総称である。1990年代後半、可積分系理論を工学分野へ応用しようとする研究が発展した。代表例として、可積分系を利用した交通流の解析や新しいアプローチの数値計算アルゴリズムである「可積分アルゴリズム」の開発が挙げられる。

研究代表者らによるこれまでの研究では、ハングリー型離散可積分系に基づいて定式化された非対称行列に対する固有値計算アルゴリズムの実用化を目指し、誤差解析や収束性解析等の理論解析、および、原点シフトと呼ばれる収束加速の手法を組み込み、より高速な収束が見込めるシフト量の計算法等に関する成果が得られていた。特に、研究代表者らが定式化した離散ハングリー戸田方程式に基づく dhToda アルゴリズムは、非対称帯行列の複素固有値を実数による演算のみで高速・高精度に計算できる。しかし、dhToda アルゴリズムが対象とする行列は特殊なクラスの行列のみであったため、アルゴリズムを適用できる行列のクラスの拡張が望まれていた。

1990年に高橋・薩摩によって箱玉系と呼ばれる離散力学系が導入されている。箱玉系の力学を記述する運動方程式は超離散化と呼ばれる手続きを介することで、可積分系に一致することが知られている。この箱玉系の運動方程式は max 演算と和 (+) からなるため、max-plus 代数と呼ばれる代数上の方程式と見なすこともできる。max-plus 代数には行列や固有値の概念も存在するが、超離散可積分系と max-plus 代数上における固有値問題との対応はこれまでに知られていなかった。

2. 研究の目的

本研究ではまず、より広いクラスの行列に適用可能な可積分アルゴリズムの構築を目指す。離散ハングリーロトカ・ボルテラ系や離散ハングリー戸田方程式に対して、それらの拡張にあたる方程式を利用し、新たなアルゴリズムを導出する。さらに、max-plus 代数上の固有値問題を解くアルゴリズムを超離散可積分系から導出することを目指す。まずは、離散戸田方程式と固有値計算のための qd アルゴリズムを対象とし、超離散化を行うことで、max-plus 代数上の新たな固有値計算アルゴリズムとして定式化する。

3. 研究の方法

離散ハングリー戸田方程式を拡張した拡張型離散ハングリー戸田方程式および離散二次元戸田方程式を対象とし、先行研究におけるアルゴリズムの導出方法に倣ってアルゴリズムを構築する。また、max-plus 代数上のアルゴリズムについては、既知の qd アルゴリズムにおける個々の要素全てに対して超離散化を施し、超離散系に対する収束性の解析および保存量の導出を行うことでアルゴリズムを構築する。さらに、超離散戸田方程式の拡張を考えることでより適用範囲の広いアルゴリズムとなるよう検討する。

4. 研究成果

拡張型離散ハングリー戸田方程式および離散二次元戸田方程式に着目し、totally nonnegative な帯行列の固有値を精度良く計算する可積分アルゴリズムの開発に成功した。行列の固有値問題は振動解析や情報検索、主成分分析、各種コンピュータシミュレーションなど実用上様々な応用があり、高速高精度な計算が必要とされている。一般の大規模で

非対称な行列の固有値を精度良く求めることは非常に難しいが、本研究で得られたアルゴリズムを用いることで、相対誤差の意味で高精度に固有値を計算できる。また拡張型超離散ハングリー戸田方程式が箱と玉の両方に番号を付けて区別した箱玉系と対応すること、さらにその保存量の存在を示し、具体的に書き下すことができた。

超離散系に対する研究について、当初は max-plus 代数上のアルゴリズムの構築を目指していたが、max-plus 代数より、和の演算を min 演算に変えた min-plus 代数を用いた方が良かったことが分かった。そこで、超離散戸田方程式に対応する min-plus 代数上の 3 重対角行列に対し、超離散戸田方程式の解挙動を調べた。時間発展において不変となる保存量の存在を示すことにより、超離散戸田方程式の時間発展が、min-plus 代数上の 3 重対角行列の固有値を計算していることが明らかとなった。このことは、三重対角行列を隣接行列とする重み付き有向グラフにおける最小平均閉路重みを求めることに対応している。従って、本研究成果の今後の展望として、ネットワーク上の最短経路問題への応用が期待される。さらに、超離散ロトカ・ボルテラ系についても検討し、min-plus 代数上の対称な 3 重対角行列の固有値を計算するアルゴリズムが得られた。付随して、超離散戸田方程式、超離散 qd 型ロトカ・ボルテラ系、超離散ロトカ・ボルテラ系を結ぶベックルト変換が得られた。加えて、任意パラメータを導入して一般化した超離散ハングリーロトカ・ボルテラ系および超離散ハングリー戸田方程式についても同様に対応する固有値アルゴリズムを検討した。パラメータの値が 2 の場合については成功しているが、任意のパラメータに対するアルゴリズムの定式化までには至らなかった。こちらについては今後の課題としたい。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 6 件)

- [1] Akiko Fukuda, Sennosuke Watanabe, Ayumi Hanaoka, Masashi Iwasaki, Ultradiscrete Lotka-Volterra system computes tropical eigenvalue of symmetric tridiagonal matrices, IOP Conference Series, accepted. (査読有り)
- [2] Sennosuke Watanabe, Akiko Fukuda, Hitomi Shigitani, Masashi Iwasaki, Min-plus eigenvalue of tridiagonal matrices in terms of the ultradiscrete Toda equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51(2018), 444001, DOI: 10.1088/1751-8121/aae325. (査読有り , オープンアクセス)
- [3] You Takahashi, Masashi Iwasaki, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Yoshimasa Nakamura, Periodic convergence in the discrete hungry Toda equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51(2018), 344001, DOI: 10.1088/1751-8121/aaccb5. (査読有り)
- [4] Hiroshi Takeuchi, Kensuke Aihara, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Computation of eigenvectors for a specially structured banded matrix, EPASA 2015: Eigenvalue Problems: Algorithms, Software and Applications in Petascale Computing, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 117(2017), 143—155, DOI: 10.1007/978-3-319-62426-6_10. (査読有り)
- [5] Akihiko Tobita, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Masashi Iwasaki, Yoshimasa Nakamura, Monotonic convergence to eigenvalues of totally nonnegative matrices in an integrable variant of the discrete Lotka-Volterra system, EPASA 2015: Eigenvalue Problems: Algorithms, Software and Applications in Petascale Computing, Lecture

Notes in Computational Science and Engineering, 117(2017), 157—169, DOI: 10.1007/978-3-319-62426-6_11. (査読有り)

- [6] 福田 亜希子, 山本 有作, 岩崎 雅史, 石渡 恵美子, 中村佳正, 箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系について, 九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動研究の深化と展開」研究集会報告, 28AO-S6(2017), 87—92, <http://hdl.handle.net/2324/1832813>. (査読有り, オープンアクセス)

[学会発表](計 18 件)

- [1] Akiko Fukuda, Ultradiscrete integrable systems and eigenvalues over min-plus algebra, The 3rd UOG-SIT Workshop in Pure/Applied Mathematics and Computer Science, University of Guam, March 22-23, 2019.
- [2] 福田 亜希子, 超離散可積分系と Min-Plus 行列の固有値, 津田塾大学数学・計算機科学研究会 離散力学系と組合せ論, 津田塾大学小平キャンパス, 2019 年 2 月 16 日.
- [3] 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 瀬川 悦生, 佐藤 宏平, 佐藤 巖, グラフの最大平均閉路重みを不変量とする max-plus ウォーク, 2018 年度応用数学合同研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 2018 年 12 月 13--15 日.
- [4] Akiko Fukuda, Sennosuke Watanabe, Enumeration of fuzzy cellular automata with prescribed fixed point using Groebner basis, Symmetries and Integrability of Difference Equations (SIDE13), Fukuoka, Japan, Nov 11-17, 2018.
- [5] Akiko Fukuda, Sennosuke Watanabe, Ayumi Hanaoka, Masashi Iwasaki, Ultradiscrete Lotka-Volterra system computes tropical eigenvalue of symmetric tridiagonal matrices, International Conference on Mathematics: Pure, Applied and Computation, Mathematics for Better Future Life, Hotel Majapahit, Surabaya, Indonesia, Oct 20, 2018.
- [6] 福田 亜希子, 渡邊 扇之介, グレブナー基底を用いた黄金比に収束するファジーセルオートマトンの列挙, 日本応用数理学会 2018 年度 年会, 名古屋大学東山キャンパス, 2018 年 9 月 3--5 日.
- [7] Akiko Fukuda, Sennosuke Watanabe, Hitomi Shigitani, Masashi Iwasaki, Ultra-discrete analogue of the qd algorithm for min-plus tridiagonal matrix, MS42: "Tridiagonal Matrices and Their Applications in Physics and Mathematics" organized by Natalia Bebiano and Mikhail Tyaglov, SIAM Conference on Applied Linear Algebra (SIAM-ALA18), Hong Kong Baptist University, Hong Kong, May 4--8, 2018.
- [8] 福田 亜希子, 渡邊 扇之介, 花岡 歩, 岩崎 雅史, トロピカル 3 重対角行列の固有値を計算する超離散ロトカ・ボルテラ系, 日本応用数理学会 2018 年研究部会連合発表会, 大阪大学工学部 (吹田キャンパス), 2018 年 3 月 15--16 日.
- [9] 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 超離散戸田方程式に付随する Min-Plus 行列の固有多項式の根とグラフの閉路, 2017 年度応用数学合同研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 2017 年 12 月 14--16 日.
- [10] 福田 亜希子, 渡邊 扇之介, 鳴谷 瞳, 花岡 歩, 岩崎 雅史, 超離散可積分系による Min-Plus 行列の固有値計算, 第 15 回計算数学会, 那須オオシマフォーラム, 2017 年 12 月 1--3 日.
- [11] 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 鳴谷 瞳, 岩崎 雅史, 超離散戸田方程式に基づく Min-Plus 行

列の固有値計算, 日本応用数学会 2017 年度 年会 , 武蔵野大学有明キャンパス, 2017 年 9 月 6--8 日.

- [12] Akiko Fukuda, Integrable eigenvalue algorithms for totally nonnegative matrices, Special session on "Total Positivity" organized by Jurgen Garloff, International Conference on Matrix Analysis and its Applications, Bedlewo, Poland, September 25--29, 2017.
- [13] Akiko Fukuda, Discrete integrable systems related to eigenvalue algorithms, The 1st UOG-SIT Research Workshop in Mathematics and Computer Science in Guam, University of Guam, Feb. 24, 2017.
- [14] 渡邊 扇之介, 福田 亜希子, 対称化された Min-Plus 代数, 第 14 回計算数学研究会, 琵琶湖コンファレンスセンター, 2016 年 12 月 17--19 日.
- [15] 福田 亜希子, 山本 有作, 岩崎 雅史, 石渡 恵美子, 中村 佳正, 箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系について, 平成 28 年度 九州大学応用力学研究所 共同利用研究集会「非線形波動研究の深化と展開」, 九州大学筑紫地区 筑紫ホール(C-Cube 1 階), 2016 年 11 月 3--5 日.
- [16] 福田 亜希子, ハングリー型可積分アルゴリズム, 応用可積分系若手セミナー, 芝浦工業大学 大宮キャンパス, 2016 年 10 月 1 日.
- [17] Akiko Fukuda, Hiroshi Takeuchi, Kensuke Aihara and Emiko Ishiwata, Extensions of the qd algorithm for totally nonnegative matrices, 20th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS2016), KU Leuven, Belgium, July 11--15, 2016.
- [18] 福田 亜希子, 竹内 弘史, 石渡 恵美子, ある非対称帯行列の固有値を計算する qd 型 dhLV アルゴリズムの拡張, 研究会「応用解析研究会 ~可積分系から計算数学まで~」, 旧桜宮公会堂, 2016 年 5 月 19--21 日.

〔その他〕

ホームページ等

Akiko Fukuda ' s Homepage

<http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~afukuda/>

6 . 研究組織

(1)研究協力者

研究協力者氏名 : 渡邊 扇之介

ローマ字氏名 : Sennosuke Watanabe

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。