

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：37401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2017

課題番号：16K21557

研究課題名(和文) 関係的・代数的手法による確率的システムの解析

研究課題名(英文) Analysis of probabilistic systems by relational and algebraic methods

研究代表者

津曲 紀宏 (TSUMAGARI, Norihiro)

崇城大学・総合教育センター・助教

研究者番号：70632834

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：(1) セガラシステムの特殊な例である確率多重関係について、システムの逐次合成などの演算を関係計算の枠組みで解析し、「全域性」という条件を排除するという一般化を行った。(2) 二項多重関係における3種の逐次合成を関係計算の枠組みで解析した。この結果の一般化が上記1の成果に寄与した。(3) 関係計算の抽象化であるデデキント圏にいくつか公理を加えたコントロール圏を提案し、コントロール圏において選択公理を形式化した。(4) 通常の二項関係を含む種々の多重関係を包括的に扱うべく、圏L上のV関係として一般化を行った。この過程において、ある確率的システムが圏L上のV関係の具体例であることが分かった。

研究成果の概要(英文)：(1) Extended the previous results [Tsumagari et al, JLAMP, 2014], we showed that convex composition of convex relations is associative. Because of not assuming totality, we introduced distribution subidentities. (2) We gave relational formalisations of Kleisli, Parikh and Peleg compositions and liftings of multirelations. These results contributed to improve the research (1) above. (3) We introduced Cantor category where is Dedekind category satisfying a few additional axiom, and relationally formulated the axiom of choice and Zorn's lemma. (4) We generalised various multirelations to "V-relations on the category L" where L has powers and V is an object of L. They includes ordinary binary relation, binary multirelation, probabilistic relation. In addition, we gave the sufficient condition to compose two different types of V-relations.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：確率的システム 意味論 関係理論 圏論 代数

## 1. 研究開始当初の背景

### (1) 確率的システムの検証

大規模システムに誤作動やサービス停止などが発生すると、甚大な被害が生じる場合がある。これを未然に防ぎ、システムの信頼性を確保する有用な手段の1つが検証である。乱択アルゴリズムや分散処理システムなど、確率的な技術を含むプログラムやシステムは増加傾向にあり、その信頼性を高める検証手法の開発にも注目が集まっている。例えば、暗号プロトコルの検証では、安全なシステムと等価であることを保証すれば良いが、鍵が存在する以上、攻撃側が微小な確率で解読に成功する可能性を排除できない。そういった無視可能な事象を含むシステムに対しては、標準的な(“非”確率的な)手法で検証することができないため、確率的な手法を採ることが望ましい。しかしながら、確率的システムに対する検証は、標準的なシステムに対する検証手法と比較すると、未だ明らかでない部分が多く実用化に至っていない。

### (2) 確率的システムの軌跡意味論

確率的システムのモデルの1つであるセガラシステム [Segala, CONCUR '95] は、非決定的分岐と確率的分岐を併せもつシステムのモデルであり、生成確率的システム(GPrS)や反応システム(RS)といった確率的システムモデルの一般化である。Silva らは、圏論における余代数を用いて GPrS について、等価性の1種である軌跡意味論についての健全かつ完全な公理化を与えている [Silva et al, ENTCS '11]。しかし、セガラシステムの軌跡意味論についての健全かつ完全な公理化はまだ知られていない。

### (3) 代数的公理化と検証

クリーニ代数は非決定性オートマトンの受理言語である正規言語の健全かつ完全な公理化である。非決定性オートマトンを余代数として考えると、正規言語は余代数における軌跡意味論に相当する。クリーニ代数の定義は、等式とホーン節で与えられており、システムの性質をクリーニ代数においてモデル化するとその現象を簡単な式変形によって検証することが可能となる。既に McIver らによって確率クリーニ代数 [McIver et al, RelMiCS '06] という代数が提案されているが、これは確率的な振る舞いを十分に表現できておらず、定量的検証に対しては活用できない。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、確率的システムのための定量的な検証手法を提供しうる新しい確率クリーニ代数を提案することである。そのため、本研究では、セガラシステムの等価性について健全かつ完全な公理系の構築と、その公理系の有効性の確認を行う。

## 3. 研究の方法

### (1) 確率的正規表現とクリーニの定理

セガラシステムの軌跡意味論に対する確率的正規表現を提案し、その正規表現についてクリーニの定理を証明する。困難である場合は正規表現を随時改善する。

### (2) 公理系の構築・健全性と完全性

(1)で与えた正規表現上の公理系を構築する。具体的には、等式・ホーン節の集合を与える。ここでは、McIver らの確率クリーニ代数も参考にする。公理系を与えた上で、その健全性と完全性の証明に取り組む。過程で不具合が生じた場合は随時公理系を改善する。

## 4. 研究成果

本研究はセガラシステムを対象としたものであったが、その特殊例である確率多重関係の解析や、関連する二項多重関係の研究が進んだため結果的にそれらを優先させる形となった。当初の計画から遅れているものの、今後の発展に有用な結果が得られていると考えている。主な研究成果は以下の4つ。

### (1) 確率多重関係の解析

セガラシステムの特例である確率多重関係について、システムの逐次合成などの演算を、関係計算を用いて解析し詳細化に成功した。既存の結果 [Tsumagari et al, JLAMP, 2014] では、逐次合成が結合律をみたすための十分条件として「全域性」を仮定していた。しかし、二項多重関係の合成を解析した結果 [後述(2)] において、二項多重関係の Peleg 合成が部分集合上の「部分恒等関係」を用いて得られたことからヒントを得て、本研究では確率分布の「部分恒等関係」を導入した。結果的に、確率多重関係における逐次合成を、二項多重関係における Peleg 合成の一般化として与えることに成功している。これにより、「全域性」を仮定せずに結合律が成り立つことが証明された。現在研究成果発表の準備を進めている。

### (2) 二項多重関係の解析

二項多重関係においては、それぞれの応用先の違いから3種類の逐次合成が提案されていた (Kleisli 合成・Parikh 合成・Peleg 合成)。本研究ではこの3種類の合成を関係計算の枠組みで解析した。3つの合成それぞれに対してリフティングを導入し、リフティングによって合成を再定義することにより、二項関係の合成へ落とし込むという詳細化に成功している。

Kleisli 合成については、仮定なしに結合律が成り立つ一方、単位元は存在しない。ゲーム代数に適用される Parikh 合成については、一般の場合結合律をみたさず、右単位元をもたない。Parikh 合成で圏を構成するには、二項多重関係が上向きに閉じている必要がある。ただし、ここでの単位元は所属関係であ

る。また, Peleg 合成も一般には結合律をみたさない。しかしながら, 二項多重関係が和で閉じていれば, Peleg 合成によって圏を構成できる。ここでの単位元は 1 点集合関数である。なお, 成果 (1) の結果は, Peleg 合成の再定義から着想が得られている。本研究の成果論文は Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming に採録されている。

[ 共同研究者: 古澤, 河原, Struth ]

### (3) 関係計算による選択公理の形式化

上記 (1) (2) の研究過程で, 選択公理の取り扱いが問題となった。そこで, 関係計算の抽象化であるデデキント圏にいくつか公理を加えたコントロール圏を提案し, コントロール圏において, 選択公理の形式化に成功した。コントロール圏は有理表現と所属関係をもつデデキント圏といえる。また, 選択公理とツォルンの補題の等価性を関係計算で示したほか, ツォルンの補題の応用としてクラトフスキーの補題の証明にも成功している。本研究の成果論文は, Bulletin of Informatics and Cybernetics へ採録されている。

[ 共同研究者: 古澤, 河原 ]

### (4) V 関係への一般化とその合成

上記 (2) における二項多重関係は, 2 人ゲームの意味論やプログラムの述語変換子意味論など, 様々な文脈で登場する。本研究では, 通常二項関係を含む種々の多重関係を包括的に扱うべく, 「圏  $L$  上の  $V$  関係」として一般化を行った。ここで, 圏  $L$  はベキ対象をもつ圏,  $V$  は圏  $L$  の対象の 1 つである。例えば, 二項関係であれば「圏  $CjLat$  上の  $2$  関係」, 二項多重関係であれば「圏  $Set$  上の  $2$  関係」, 上向きに閉じた二項多重関係であれば「圏  $Poset$  上の  $2$  関係」となる。また, ある確率的システムのモデルも「圏  $EMod$  上の  $[0,1]$  関係」で表現できることが分かっている。さらに本研究では, 計算機科学において重要な代数の 1 つであるクォンテールを関係値とする関係「クォンテール価関係」を定義している ( $K$  がクォンテールならば,  $A \times B \rightarrow K$  という型の関数である)。クォンテール価関係は「圏  $K-Lmod$  上の  $K$  関係」である。

また, 同研究においては, 異なる 2 つの「圏  $L$  上の  $V$  関係」を合成するための十分条件も与えている。現在までのところ, 「クォンテール価関係同士」や「多重関係とクォンテール価関係」など, 確率的ではないモデル同士の合成の例しか発見できていない。今後, 確率的システムと非確率的システムの合成例の発見が期待される。本研究の成果論文は現在投稿中である。

[ 共同研究者: 西澤 ]

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[ 雑誌論文 ] (計 2 件)

H. Furusawa, Y. Kawahara, G. Struth, and N. Tsumagari.

Kleisli, Parikh and Peleg compositions and liftings for Multirelations.

Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming, 査読有, vol.90, 2017, pp.84-101.

DOI: 10.1016/j.jlamp.2017.04.002

H. Furusawa, Y. Kawahara, and N. Tsumagari.

Axiom of Choice and Zorn's Lemma in Cantor Categories.

Bulletin of Informatics and Cybernetics, 査読有, vol.49, 2017, pp.11-34.

[ 学会発表 ] (計 1 件)

津曲 紀宏, 多重関係の合成とリフティングの关系的形式化, 記号論理と情報科学研究集会 (SLACS). 2016.

[ その他 ]

研究代表者個人 Web ページ

<https://sites.google.com/site/tsumagari83/>

崇城大学・研究業績データベース

<http://rsrch.ofc.sojo-u.ac.jp/sjuhp/KgApp>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

津曲 紀宏 (TSUMAGARI Norihiro)

崇城大学・総合教育センター・助教

研究者番号: 70632834

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし

### (4) 研究協力者

古澤 仁 (FURUSAWA Hitoshi)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 00357930

河原 康雄 (KAWAHARA Yasuo)

九州大学・名誉教授

研究者番号: 90091181

西澤 弘毅 (NISHIZAWA Koki)

神奈川大学・工学部・准教授

研究者番号: 60455433

Georg STRUTH  
University of Sheffield • Department of  
Computer Science • Professor