

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C) (特設分野研究)

研究期間：2016～2019

課題番号：16KT0132

研究課題名(和文) 情報空間の幾何学理論の統一的構成と形態情報科学の構築

研究課題名(英文) Unified construction of geometric theory for information space and morphological information science

研究代表者

松添 博 (Matsuzoe, Hiroshi)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：90315177

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：情報幾何学ではマルコフ埋め込みと呼ばれる統計モデルの埋め込みに関して不変性を要請し、その不変性から幾何学構造を決定する方法は非常に重要である。しかしながらマルコフ埋め込みの構成法自体に任意性があり、マルコフ埋め込みの構成を変更できることが分かった。その結果、新しいマルコフ埋め込みに対応した異なる不変性が得られることを示した。この結果は研究開始当初には想定していなかった内容であるが、情報幾何学の基礎的性質に関する重要な進展である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

情報幾何学における不変性の要請は、情報空間の幾何学構成において非常に重要な基本原則である。しかしながら、その不変性に任意性があり、従来とは異なる自然な埋め込みを構成することで、新しい幾何学構造の不変性が得られることを示した。この研究成果は情報空間の微分幾何学的基礎理論として、非常に重要であると考えている。

研究成果の概要(英文)：In information geometry, the invariance of geometric structures for statistical models under Markov embedding is very important. However, our research group found that the construction of Markov embedding is not unique, and the embedding can be modified. As a result, it is shown that different invariants corresponding to the new Markov embedding are obtained. The result of this study, which was not expected at the beginning of this research project, is an important development on the basic properties of information geometry.

研究分野：幾何学

キーワード：情報幾何学 マルコフ埋め込み

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

統計科学において幾何学的手法論は広く用いられている。一般に統計モデルは確率密度関数の族として表現され、その要素は標本空間上の確率変数 x とパラメータ空間上のパラメータにより指定される。標本空間の幾何構造を議論するものとしてカーネル法があり、パラメータ空間の幾何構造を議論するものとして Wasserstein 幾何学や情報幾何学などがある。

近年の数理科学には、強い相互作用を持つ現象を少数の標本のみで議論する必要がある問題が数多く存在する。大量の標本が得られていれば、近年のビッグ・データ科学によりデータ駆動で議論が可能である。しかしながら、少数標本の場合には適切に統計モデルを設定し、モデル駆動で現象を解析する必要がある。このような強相関・小標本に関する統計を異常統計と呼ぶ。

研究代表者による異常統計における統計モデルについての情報幾何学的研究によって、確率変数の期待値や独立性の概念は、統計モデルの選び方によって変化することが自然であり、さらにこの変化は標本空間の代数構造の変化としても説明することができることがわかってきた。相対性理論においては、時間や空間のパラメータは不変ではなく、物体の移動速度や重力などによって変化した。これと同様に異常統計の解析では、統計モデルの設定によって標本空間の代数構造が変化する。

このように、現象を忠実に表現する統計モデルと、統計学において一般的に議論されてきた統計モデルは異なる。例えば、本来独立ではない確率変数間に独立性を仮定し近似モデルを構築することは、球面を、円筒図法で表現することと似ている。確率変数が独立であるということは、その変量間の座標が直交していることに類似している。非常に直感的な説明ではあるが、高次相関のある現象を「互いに独立な確率変数」を用いて近似的にモデルリングすることは、変量間に強制的に直交座標系を導入することに相当する。

上述は情報幾何学に関連した研究であり、統計モデルのパラメータ空間上の幾何構造を議論する。一方のカーネル法は、再生核ヒルベルト空間を用いた統計解析手法である。この手法では標本空間を特徴写像とよぶ非線形変換によって高次元の再生核ヒルベルト空間に表現する。その結果、確率変数の期待値や独立性を非線形に拡張することが可能である。機械学習理論で多用されるガウスカーネルの場合、標本空間は無次元空間内のシリンダーとして表現される。

さらに Wasserstein 幾何学は、統計モデルのパラメータ空間に対する幾何学である。この幾何学では標本空間の内的な多様体構造を、確率分布の輸送コストとして統計モデルに表現する。そのため、標本空間の多様体構造を直接的に反映した幾何学である。一般の統計モデルでは Wasserstein 距離などを具体的に計算することは難しいが、輸送コストを適切に設定することにより画像や統計データに対する解析が可能となる。カーネル法と Wasserstein 幾何学の対応関係は、異常統計の情報幾何学に類似した、標本空間の幾何構造の2面的な表現と考えられる。

2. 研究の目的

本研究は情報幾何学、カーネル法などの統計科学における幾何学的手法論の統一的な基礎を構築するとともに、理論的・抽象的な意味まで含めた「図形」の関する数理解析手法を構築する。統計科学における幾何学的手法論のうち、近年盛んに研究が行われているカーネル法、および Wasserstein 幾何学について、幾何学的測度理論の視点から統一的に議論を行い、「図形」に関する数理解析手法の基礎を構築する。幾何学的測度理論において重要となるカレントの構成や、データからのモデル選択には、情報幾何学という異なる幾何学的手法論を用いることにより、統計的に頑健性を持った理論とする。

3. 研究の方法

Wasserstein 幾何学における確率分布の最適輸送問題を、再生核とカレントを用いた表示に書き換えを行う。従来の研究結果を確率密度関数の時間発展という視点から見ると、Wasserstein 幾何学やカレントの統計学は、共通の数学的基礎に由来していると見なされる。J. Solomonらの論文は、確率測度の最適輸送に情報論的なエントロピーから正則化を行ったものである。一方 Durrleman の論文は、微分同相写像により正則化を行ったものである。輸送写像やカレントなどの概念は現れないが、上述の研究に対して共通の枠組みを与えていると考えられる。これらの考察から、まずは Wasserstein 幾何学における最適輸送写像をカレントで表示することにより、確率分布の輸送コストの幾何学的意味を明確にする。

少数の標本しか利用できず、確率変数にも非線形な相関構造がある設定では、基底関数の選択が重要であると考えている。ここでガウスカーネルを始めとして、実用的に利用可能なカーネルは異常統計における変形指数関数を用いて表現されるので、情報幾何学の視点からの議論ができると予想している。情報幾何学も活用することにより、カーネルやカレントのモデル選択手法の検討を行う。

研究代表者はこれまで情報幾何学の研究を中心に行ってきた。一方、研究分担者の高津は Wasserstein 幾何学の研究を中心に行ってきた。ここに画像処理工学の研究者とも連携しながら課題解決に取り組む。

4. 研究成果

情報幾何学では Markov 埋め込みのと呼ばれる統計モデルの埋め込みに関して不変性を要請し、その不変性から幾何学構造を決定する方法は非常に重要である。しかしながら Markov 埋め込みの構成法自体に任意性があり、Markov 埋め込みの構成を変更できることが分かった。その結果、新しい Markov 埋め込みに対応した異なる不変性が得られることを示した。

この結果は研究開始当初には想定していなかった内容であるが、情報幾何学の基礎的性質に関する重要な進展である。特に、本研究の最終年度において overlapped Markov embedding という新しいマルコフ埋め込みを構成し、その埋め込みに関する不変計量を決定した。

研究開始当初はカレントの幾何学を中心に問題を設定していたが、研究の初期段階において、確率変数の期待値という概念が不変なものではなく、統計モデルや統計量に依存して逐次的に表れるという結果が得られた。この事実は研究開始当初には想定していなかった結果であり、図形の特徴量などに大きな影響を与えると解釈した。そのため、期待値の逐次構造という視点から、統計モデルの幾何学についての考察も行った。その結果、期待値の逐次構造から統計モデルの空間に、自然な多様体構造やダイバージェンス関数を構成できた。さらに既存の変形対数関数にも修正を行い、統計モデルの正規化問題などを議論した。

さらに通常の対数関数の性質に関して、ユークリッド空間の熱流が保つ最強の凹性が対数凹性ではないことがわかり、最強の凹性が何であるかを決定した。対数関数に付随する情報幾何学の既存の理論は、この最強の凹性を特徴付ける関数を用いて一般化できることが期待できる。そのため、研究期間を延長した最終年度の研究において、対数関数を細分化するという発想から変形期待値の定義で重要なエスコート分布の細分化を行った。この結果、エントロピーは同一であるにもかかわらず誘導される情報幾何構造は異なるという、エントロピーのゲージ不定性に関する結果を得た。

これらの研究成果は国際学術誌で出版するとともに、情報幾何学や Wasserstein 幾何学に関する国際会議を始めとして、国内外の学会などで研究成果発表を行った。なお、研究最終年度に得られた研究成果は、この研究報告書を作成時点では投稿中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Asuka Takatsu	4. 巻 372
2. 論文標題 Convergence of combinatorial Ricci flows to degenerate circle patterns	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 7597 - 7617
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7778	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuhiro Ishige, Paolo Salani, Asuka Takatsu	4. 巻 22
2. 論文標題 To logconcavity and beyond	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 1950009
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219199719500093	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Matsuzoe Hiroshi, Scarfone Antonio M., Wada Tatsuaki	4. 巻 10589
2. 論文標題 A Sequential Structure of Statistical Manifolds on Deformed Exponential Family	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 223 - 230
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-319-68445-1_26	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hiroshi Matsuzoe, Antonio M. Scarfone, Tatsuaki Wada	4. 巻 11712
2. 論文標題 Normalization Problems for Deformed Exponential Families	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 279 - 287
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-26980-7_29	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 10件）

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Sequential Structures of Statistical Manifolds
3. 学会等名 Entropy (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Geometry of generalized entropy
3. 学会等名 Information Geometry and Affine Differential Geometry III (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Asuka Takatsu
2. 発表標題 To log concavity and beyond
3. 学会等名 Workshop on barycenters, convexity on metric spaces and positive operators (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 A sequential structure of statistical manifolds on deformed exponential family
3. 学会等名 3rd conference on Geometric Science of Information
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高津飛鳥
2. 発表標題 Wasserstein幾何と情報幾何
3. 学会等名 東北大学理学研究科数学専攻談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe
2. 発表標題 Construction of model selection criterion for q-exponential family
3. 学会等名 International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Asuka Takatsu
2. 発表標題 Curvature Dimension condition from the viewpoint of Information geometry
3. 学会等名 Follow-up Workshop to JTP "Optimal Transportation" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Asuka Takatsu
2. 発表標題 Riemannian Wasserstein geometry on the space of Gaussian measures over the Wiener space
3. 学会等名 第1回日本-台湾微分幾何研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Matsuzoe, Antonio M. Scarfone, Tatsuaki Wada
2. 発表標題 Normalization problems for deformed exponential families
3. 学会等名 4th conference on Geometric Science of Information (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高津 飛鳥, 松添 博
2. 発表標題 Cencov の定理再訪
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	高津 飛鳥 (Takatsu Asuka) (90623554)	首都大学東京・理学研究科・准教授 (22604)	