

平成21年 5月22日現在

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2005～2008

課題番号：17204003

研究課題名(和文) 多様体の収束・崩壊理論とリッチ流および特異空間の幾何学・解析学

研究課題名(英文) Convergence・collapsing theory of manifolds, Ricci flows and the geometry and analysis of singular spaces

研究代表者

山口 孝男 (YAMAGUCHI TAKAO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号：00182444

研究成果の概要：

- (1). 曲率が上に有界な2次元特異空間の局所構造を完全に決定し、ガウスボンネ型定理を得た(永野幸一、塩谷隆、B.Kleiner 3氏との共同研究)。
- (2). 断面曲率が下に直径が上に一様に有界な多様体或は特異空間に対して、本質的被覆なる新しい不変量を発見し、それが一様に有界であることを証明した。これによりグロモフ氏のベッチ数有界性定理の新しい見地からの別証明を得た。
- (3). ペレルマン氏のリッチ流に関する仕事を解明し、3次元多様体のリッチ流の特異時間における退化現象を解明した。
- (4). 軌道体に対するゲルファンド・スペクトル逆問題を考察し、その局所スペクトラルデータから軌道体の等長同型構造が完全に決定されることを証明した(Y. Kurylev, M.Lassas 氏との共同研究)。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	7,100,000	2,130,000	9,230,000
2006年度	6,000,000	1,800,000	7,800,000
2007年度	5,900,000	1,770,000	7,670,000
2008年度	6,100,000	1,830,000	7,930,000
年度			
総計	25,100,000	7,530,000	32,630,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：リーマン多様体、崩壊、アレクサンドロフ空間、リッチ流

1. 研究開始当初の背景

- (1). 3、4次元多様体の崩壊理論が完成し、更に一般次元で明らかにしたいという動機があり、その為にも特異空間の幾何学と解析学が有用であるという判断していた。
- (2). ペレルマン氏によるリッチ流による幾何化予想解決の大きな仕事があり、これを理解し、リッチ流の観点からも収束・崩壊理論

構築に挑戦したいという意図であった。

2. 研究の目的

- (1). 一般次元多様体の崩壊現象を解明する。
- (2). 特異空間(アレクサンドロフ空間)のリブシツ構造を始めとする構造を解明すること。
- (3). 特異空間のラプラシアンに関する解析

学を展開すること。

(4). ペレルマン氏によるリッチ流に関する仕事を正当化し、その土台に立って4次元微分可能ポアンカレ予想に挑戦すること。

3. 研究の方法

多くの国内外の研究集会に参加し研究発表を行い、関連研究者と議論・討論したことで研究を活性し進展させることができた。

(1). 研究代表者が、国際研究集会やメリーランド大学を訪問し K.Grove 氏や V.Kapovitch 氏と議論した。一般次元多様体に対する崩壊理論研究を進展させるのに有益だった。

(2). 研究代表者が、IHES 滞在中に、曲率が上に有界な特異空間の局所構造に関する研究の突破口を開くことができた、M.Gromov 氏との議論は大いに刺激となった。

(3). 横田巧氏(筑波大学振特別研究員)のセミナー指導を通じてペレルマン氏の仕事を解明して行った。日本数学会・日本物理学会合同講演会にて発表した。

(4). 代表者のロンドン出張 Kurylev, Lassas 両氏の筑波大学への招聘により、軌道体のスペクトル逆問題が大いに進展した。

毎年研究集会[リーマン幾何と幾何解析]を筑波大学で開催し、研究課題の活性化と研究分野の普及に努めた。

4. 研究成果

(1). 曲率が上に有界な2次元特異空間の局所構造の決定とガウスボンネ型定理に関する結果は、2次元多面体の場合の Buyalo-Burago 両氏の結果を一般化する最終形でもあり、世界的に高い評価を受けている。3次元への拡張などが次の大きな課題となる。

(2). 断面曲率が下に直径が上に一様に有界な空間の本質的被覆の一様有界性に関する結果は、国際研究集会発表時に高い評価を受けた。この方面の最先端の研究である。

(3). ペレルマン氏のリッチ流に関する仕事の解明は世界的にかなり整備されてきた。しかし、3次元多様体のリッチ流の特異時間における退化現象を解明した本研究のような結果はこれまで知られていない。

(4). 軌道体に対するゲルファンド・スペクトル逆問題に関して、その局所スペクトラルデータから軌道体の等長同型構造が完全に決定されることを証明した。手法は境界制御法と呼ばれるものであるが、今後、より一般の特異空間に拡張し崩壊理論と関連した逆問題の展開が可能になるのではないかと思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計28件)

- ① T. Yamaguchi, An upper curvature bound and singularities, Noncommutativity and Singularities, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 55, 2009, 161--171. (査読有り)
- ② Kawamura, Kazuhiro; Miura, Takeshi, On the root closedness of continuous function algebras. *Topology Appl.* 156 (2009), no. 3, 624—628 (査読有り)
- ③ Fukaya, Kenji; Seidel, Paul; Smith, Ivan Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles. *Invent. Math.* 172 (2008), no. 1, 1--27. (査読有り)
- ④ Kuwae, Kazuhiro; Shioya, Takashi, Variational convergence over metric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 360(2008), 347--353. (査読有り)
- ⑤ Itoh, Mitsuhiro; Satoh, Hiroyasu; Shishido, Yuichi, A note on the Fisher information metric and heat kernels. *Int. J. Pure Appl. Math.* 46, (2008), 347--353. (査読有り)
- ⑥ Itoh, Mitsuhiro; Masamune, Jun; Saotome, Takanari The Serre duality theorem for a non-compact weighted CR manifold. *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008), no. 10, 3539—3548. (査読有り)
- ⑦ Itoh, Mitsuhiro; Shishido, Yuichi Fisher information metric and Poisson kernels. *Differential Geom. Appl.* 26 (2008), no. 4, 347—356. (査読有り)
- ⑧ Itoh, Mitsuhiro The Serre duality for holomorphic vector bundles over strongly pseudo convex CR manifolds. *Proceedings of the Eleventh International Workshop on Differential Geometry*, 17--24, Kyungpook Nat. Univ., Taegu, 2007. (査読無し)
- ⑨ Itoh, Mitsuhiro 3-dim Seiberg-Witten theory and the Thurston's geometric structures. *Proceedings of the Eleventh International Workshop on Differential Geometry*, 9--16, Kyungpook Nat. Univ., Taegu, 2007. (査読無し)
- ⑩ Itoh, Mitsuhiro; Saotome, Takanari The Serre duality theorem for

- holomorphic vector bundles over a strongly pseudo-convex manifold. Tsukuba J. Math. 31 (2007), no. 1, 197—204. (査読有り)
- ⑪ Hattori, Tae; Kasue, Atsushi, Dirichlet finite harmonic functions and points at infinity of graphs and manifolds. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 83 (2007), 129--134 (査読有り)
- ⑫ Kawamura, Kazuhiro; Miura, Takeshi On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations. Topology Appl. 154 (2007), no. 2, 434--442. (査読有り)
- ⑬ Brodskiy, N.; Dydak, J.; Karasev, A.; Kawamura, K. Root closed function algebras on compacta of large dimension. Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), no. 2, 587--596 (査読有り)
- ⑭ Satoh, Hiroyasu Almost Hermitian structures on tangent bundles. Proceedings of the Eleventh International Workshop on Differential Geometry, 105--118, Kyungpook Nat. Univ., Taegu, 2007(査読無し)
- ⑮ Fujiwara, Koji; Shioya, Takashi; Koichi Nagano Fixed point sets of parabolic isometries of CAT(0)-spaces, Comment. Math. Helv. 81 (2006), 1305--1335 (査読有り)
- ⑯ Oh, Yong-Geun; Fukaya, Kenji Floer homology in symplectic geometry and in mirror symmetry. International Congress of Mathematicians. Vol. II, 879--905, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006. (査読有り)
- ⑰ Fukaya, Kenji Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to symplectic topology. [Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to symplectic topology] Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology, 231--276, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 217, Springer, Dordrecht, 2006. (査読有り)
- ⑱ Kasue, Atsushi, Convergence of Riemannian manifolds and Laplace operators. II (査読有り) Potential Anal. 24(2006) 137--194
- ⑲ Fukaya, Kenji, Metric Riemannian geometry. Handbook of differential geometry. Vol. II 2006, 189—313. (査読有り)
- ⑳ Kasue, Atsushi Variational convergence of finite networks. Interdiscip. Inform. Sci. 12 (2006), no. 1, 57--70. (査読有り)
- ㉑ Itoh, Mitsuhiro; Yamase, Takahisa The dual Thurston norm and the geometry of closed 3-manifolds. Osaka J. Math. 43 (2006), no. 1, 121—129. (査読有り)
- ㉒ T. Shioya and T. Yamaguchi, Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound, Math. Annalen, 333 (2005), 131---155. (査読有り)
- ㉓ Fukaya, Kenji Multivalued Morse theory, asymptotic analysis and mirror symmetry. Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, 205--278, Proc. Sympos. Pure Math., 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. (査読有り)
- ㉔ Itoh, Mitsuhiro Miyaoka-Yau inequality and complex hyperbolicity. Topics in almost Hermitian geometry and related fields, 105--112, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005. (査読有り)
- ㉕ Kawamura, Kazuhiro On a conjecture of Wood. Glasg. Math. J. 47 (2005), no. 1, 1--5. (査読有り)
- ㉖ Chigogidze, A.; Karasev, A.; Kawamura, K.; Valov, V. On C^* -algebras with the approximate n -th root property. Bull. Austral. Math. Soc. 72 (2005), no. 2, 197--212. (査読有り)
- ㉗ Kawamura, K.; Tuncali, H. M.; Tymchatyn, E. D. Hereditarily indecomposable inverse limits of graphs. Fund. Math. 185 (2005), no. 3, 195--210. (査読有り)
- ㉘ Satoh, Hiroyasu 4-dimensional almost Kähler manifolds and 2 -scalar curvature functional. Differential Geom. Appl. 23 (2005), no. 2, 114--127. (査読有り)

[学会発表] (計 14 件)

- ① T. Yamaguchi, Collapsing and essential covering of Riemannian manifolds, 9th Pacific Rim Geometry Conference, Invited address, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, Dec. 10--14, 2008
- ② T. Yamaguchi, Collapsing and essential covering of Riemannian manifolds, Global KMS International Conference, Invited address,

- Jeju, Korea, Oct. 24, 2008
- ③ T. Yamaguchi, Convergence of surfaces with bounded total absolute curvature, Analysis seminar, Kings College, London, England, Oct. 16, 2008
- ④ T. Shioya, Geometric analysis on Alexandrov spaces, /Séminaire Borel: New approaches to curvature, /2008.8.25-2008.8.29, スイス レディアブラレ, 4 回連続講演.
- ⑤ A. Kasue, Functions of finite Dirichlet sum and compactifications of infinite graphs, The 1st MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geometry, Kyoto, July 28-August 8, 2008
- ⑥ 山口孝男, Perelman による幾何化予想解決、日本数学会・日本物理学会合同講演会、2008 年 3 月 22 日、近畿大学
- ⑦ T. Shioya, SLaplacian on Alexandrov spaces, Stochastic calculus on manifolds, graphs, and random structures, 2007.10.8-2007.10.12, ドイツ ハウスドルフ数学研究所.
- ⑧ T. Yamaguchi, Two-dimensional Alexandrov spaces with curvature bounded above, International Conference, Russian-German Geometry Meeting dedicated to the 95th-anniversary of A.D. Alexandrov June 18 - 23, 2007, St. Petersburg, Russia.
- ⑨ T. Shioya, Laplacian on Alexandrov spaces, 日中友好幾何学研究集会, 2006.12.14-2006.12.22, 中国 昆明.
- ⑩ T. Yamaguchi, An upper curvature bound and singularities, Singularities, Hayashibara forum, IHES, Bures-sur-Yvette, France, 20-23 Septembre, 2006.
- ⑪ 塩谷 隆, 3次元多様体の崩壊, 日本数学会 秋季 総合分科会, 2006.9.19-2006.9.22, 大阪市立大学, 幾何学賞授賞講演.
- ⑫ 永野幸一, CAT(1)空間に対する球面定理, 日本数学会 2006 年度秋季総合分科会, 幾何学分科会特別講演, 大阪市立大学, 2006 年 9 月 21 日.
- ⑬ 永野幸一, CAT(1)空間の位相正則性, 第 53 回幾何学シンポジウム, 全体講演, 金沢大学, 2006 年 8 月 5 日.
- ⑭ T. Yamaguchi, Collapsing 4 -manifolds under a lower curvature bound, I-IX (series of lectures), University of Maryland, College Park, USA, March 13 - 17, 2006.

〔図書〕(計 1 件)

- ① 戸田正人, 3次元トポロジーの新展開---リッチフローとポアンカレ予想, サイエンス社 2007 年、200 ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山口 孝男 (YAMAGUCHI TAKAO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号: 00182444

(2) 研究分担者

深谷 賢治 (FUKAYA KENJI)

京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 30165261

加須栄 篤 (KASUE ATSUHI)

金沢大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 40152657

塩谷 隆 (SHIOYA TAKASHI)

東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90235507

戸田 正人 (TODA MASAHITO)

お茶の水女子大学・大学院人間文化研究科・教授
研究者番号: 80291566

伊藤 光弘 (ITO MITSUHIRO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号: 40015912

大津 幸男 (OTSU YUKIO)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 80233170

川村 一宏 (KAWAMURA KAZUHIRO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号: 40204771

永野 幸一 (NAGANO KOICHI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師
研究者番号: 30333777

佐藤弘康 (SATO HIROYASU)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准研究員
研究者番号: 00375396