様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　4月３０日現　在

研究種目：基盤研究(A)
研究期間：2005～2008
課題番号：17204005
研究課題名（和文）　幾何学における統計法則

研究課題名（英文）　Statistical Laws in Geometry

研究代表者
小林　亮一（Ryoichi Kobayashi）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：20162034

研究成果の概要：（１）代数的極小曲面のガウス写像の値分布論の構築．集団コーン・フォッセン不等式と周期条件のネバンリンナ理論への翻訳が理論の要である．（２）正の４元数ケーラー多様体の枠バンドルから定まるツイスター空間上のある主束上の横断的アインシュタイン計量と，その回りの横断的リッチフロー不安定セルの構成．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００５年度	6,700,000	2,010,000	8,710,000
２００６年度	5,900,000	1,770,000	7,670,000
２００７年度	5,900,000	1,770,000	7,670,000
２００８年度	6,100,000	1,830,000	7,930,000
総　計	24,600,000	7,380,000	31,980,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何

１．研究開始当初の背景

（１）完備極小曲面のガウス写像の値分布は 1960 年代に Osserman が開始し，Xavier, Fujimoto の研究により高々4 点を除外することが示されて決着した．しかし代数的極小曲面という特別な完備極小曲面のガウス写像は高々3 点しか除外しないことは Osserman が 60 年代に示し，2 点除外の例が多く構成された．代数的極小曲面のガウス写像は最大何点除外するかという問題に動機づけられて代数的極小曲面のガウス写像の値分布論を構築した．これは穴あきリーマン面の基本群作用つきで円板上のネバンリンナ理論を構築する問題になる．（２）Perelman のリッチフローによる幾何化予想解決に触発されて，リッチフロー不安定セルと多様体の崩壊が幾何にどのような結果をもたらすかという問題に関心を持った．Perelman の着想はリッチフローに有限時間で現れる特異点から特異点情報をすべて含む漸近ソリトンを構成するというものであった．そこで最も単純かつ非自明な特異点としてファイバー束の崩壊を考え，それがリッチフローに有限時間で現れる特異点として実現できる場合を探した．正の 4 元数ケーラー多様体のツイスター空間の崩壊がその例になると考えて漸近ソリトンとしてのアインシュタイン計量とその回りの不安定セルを構

成しようという着想を得た．

２．研究の目的

目的は上記の(1), (2) で得た着想を発展させて関連する幾何の未解決問題を解くことである．(1)では代数的極小曲面のガウス写像の第２主要定理が証明できるような新種の幾何的枠組みを作ることである．これは円板上のネバンリンナ理論と穴あきリーマン面の基本群作用を融合された理論になるはずである．(2)ではリッチフローに有限時間で現れる特異点として消滅の次に単純な，非自明なファイバー束が崩壊する例とその漸近ソリトンを構成し，崩壊によって曲率の微分評価がどうなるかを調べることである．

３．研究の方法　まず(1)について述べる．

穴あきリーマン面の代数幾何を用いて代数的極小曲面を研究する Osserman の方法が伝統的である．そのネバンリンナ類似はどうあるべきかを考えることによって代数幾何の方法の持つ幾何的な意味を明らかにするのが研究の第一歩だった．Osserman の方法の幾何的意味を明らかにし，ネバンリンナ類似では何が問題になるかを明らかにできた．本質的なのは，代数幾何では見ることができない基本領域のユークリッド幾何的歪みをネバンリンナ類似では見ることができるということだと分かった．代数的極小曲面のコーン・フォッセン不等式では曲面全体上でのガウス曲率積分とポアンカレ面積を比較する．代数幾何ではリーマン・ロッホの定理からこの比較が可能である．一方，代数的極小曲面を普遍被覆である円板に持ち上げてネバンリンナ理論を考えると，原点中心の同心円の族で基本領域を切って得られる切れ端の集団上で 2 つの積分を比較して，円板の半径が 1 に近づく極限での挙動を研究するとりう統計的な問題になる．この集団を支配するのは，ユークリッド的に捩れた基本領域たちのカスプの環状近傍であることが群論的考察から分かる．この考察から，ガウス曲率積分のネバンリンナ類似であるガウス写像の高さ関数を，ポアンカレ面積のネバンリンナ類似である双曲的高さ関数の，ある定数倍（基本領域のユークリッド的捩れから普遍的に決まる）で下から評価する不等式が示される．これが，集団コーン・フォッセン不等式である．次に，代数的極小曲面をアーベル・ヤコビ積分で実現するときの周期条件をネバンリンナ理論に翻訳する問題を解決しなければならない．集団コーン・フォッセン不等式は擬代数的極小曲面のガウス写像の最良の誤差項評価を与える対数微分の補題と同値である．一方，筆者の数年前の研究により，対数微分の補題は，ターゲット上の因子で対数的極を持つ 1 次微分形式を接束上の有理型関数と考えたものの不確定集合の特異点解消から，考えている正則写像の情報を引き出す幾何的枠組みと解釈できる．この枠組みを，ガウス写像が極をとる点の代数的極小曲面の基本群による軌道を半径 r の円周で「切り取った」点集合に適用してみる．r を 1 に近づける極限をとると，周期条件が，あるネバンリンナ理論的な等式に変換されることが分かる．このことと，対数微分の補題から第２主要定理を導くネバンリンナ理論の一般論を組み合わせると，代数的極小曲面のガウス写像の第２主要定理を示すことができる．

次に(2)について述べる．Hitchin の結果により，正の自己双対 4 次元多様体はそのツイスター空間がケーラー多様体になるものだけで，S^4 と P^2(C) だけである．その一般化として，正の 4 元数ケーラー多様体は対称空間に限るか，という未解決問題がある．Perelman のリッチフローによる解決に触発されて，漸近ソリトンのアイディアがこの問題に使えないか考えた．方法は，ツイスター空間の 4 元数ケーラー多様体への崩壊をリッチフローの有限時間の特異点として実現して，その漸近ソリトンのもつ情報からリッチフローの曲率の微分のノルムが崩壊とともに零に収束するかどうか調べるというものである．現時点でこの試みはツイスター空間上では（4 元数射影空間の場合を除いて）成功していない．4 元数ケーラー多様体の枠束をツイスター空間上の主束として実現しておき，そこで正の横断的アインシュタイン計量を構成できて，その回りに横断的リッチフローの不安定セルを構成できるところまでは分かった．これは有限時間で特異点に到達し，ツイスター束の底空間が崩壊するが底空間が生き残るようスケール変換して見直すと 4 元数ケーラー空間上のある計量に収束する．スケール変換後の計量の曲率テンソルの微分は消えることがリッチフローの曲率の微分の評価から示される．横断的リッチフローを考えているためにこの結果がもとの 4 元数ケーラー多様体上で何を意味しているのかがよく分からない．この点を解明するのが次の課題である．一方，この方法は現時点では成功かどうか不明だが，S^4 のツイスター空間である 3 次元複素射影空間の余等質 1 の正のアインシュタイン計量の新種の構成方法を与える可能性がある．この方法は常微分方程式を解くという形式をとらない．対称性を利用して既存のアインシュタイン計量を幾何的に変形してその性質を動標構で計算しようというものである．この実験的計算は，

時に複雑な項の驚くべき消滅を起こすことが分かった（今後の研究課題である）.

最後に研究期間中に得られた今後の研究に向けた新しい着想について述べる．3 次元リィ群上の左不変計量のなすリッチフローから 4 次元リッチフラット計量が構成できることを指導している院生が証明した．これを無限遠におけるモデルとして，複素曲面のある種の特異因子の補集合における完備リッチフラットケーラー計量の一般的存在定理を示すことができる．特異因子の補集合における完備リッチフラットケーラー計量の一般的存在定理は現時点では文献にないが，これはひとつの有効なアプローチになるはずである．これに関連して階数 2 以上の複素化対称空間のワンダフルコンパクト化も無限遠因子が特異でその補集合に完備リッチフラットケーラー計量の存在が予想されている．この問題へのアプローチとして対称空間の双対性を使う方法を思いついた．例えば複素化対称空間である SL(3,C)/SO(3,C) の中に有界対称領域である Sp(2,R)/U(2)を埋め込んでおいて，コンパクト群作用で領域にまで広げて，非コンパクト群作用で exhaustion を作ると，ベルグマン計量の列を構成できる．これを適当なスケールで見直したものは SL(3.C)/SO(3,C)上の完備リッチフラットケーラー計量に収束すると予想される．この予想は対称空間の幾何としても面白くて種々の興味ある問題が派生してくる．また，非等質アインシュタイン計量の構成問題に対して有効な方法を提供する．今後，このような問題へのアプローチを実行する予定である．

４．研究成果　まず(1)の成果を述べる．(A)集団コーン・フォッセン不等式：「擬代数的極小曲面のガウス写像を円板上に持ち上げたものの高さ関数 Tg(r) と双曲的高さ関数 Thyp(r) の間には r が 1 に近づく極限では漸近的に (2/2.71) Thyp(r) ≧ Tg(r) ≧ (2/2.72) Thyp(r) の関係がある」(B) 代数的極小曲面のガウス写像に対する第２主要定理：「P^1(C)上の任意の因子 D に対するガウス写像の接近関数は高さ関数 Tg(r) の(2.72)倍で上から押さえられる」コメント：集団化するとコーン・フォッセン不等式は漸近的な等式になる．第２主要定理から代数的極小曲面のガウス写像の全分岐値数は高々2.72 であることが従う．とくに高々2 点しか除外しないことが分かる．次に(2)の結果を述べる．4 元数ケーラー多様体のツイスター空間上には Sp(n)Sp(1)∩U(2n)主束が乗るが，これに階数 4n の非水平的分布が存在して，この分布から動標構を作って定義されるリーマン計量でツイスター空間上の横断的アインシュタイン計量になるものが存在する．そして，これを漸近ソリトンに持つ横断的リッチフローから成る不安定セルが存在する．このセルからリッチフロー軌道をとると有限時間でツイスター束の底空間が崩壊するという特異点に到達するが，底空間が生き残るようにスケールを変えてみ直すと，ファイバーが爆発して見えなくなり，底空間上のある計量に収束することが分かる．このスケールで見ると極限計量の曲率テンソルの微分は零になっている．横断的リッチフローでの計算なので直ちに底空間が対称空間だとは結論できないが，それを示唆する計算結果だと思える．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　6　件）

1)Y.Kawakami, <u>R.Kobyashi</u> and R.Miyaoka, ``The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces'', Forum Math. 20-6.2008.1055-1069.（査読あり）

2)<u>R. Kobayashi</u>, ``対数 Sobolev 不等式，エントロピー公式，Riemann 幾何的熱浴 －Perelman による Ricci flow へのアプローチ, I'', 数学（岩波）60-3.2008.225-247.（査読あり）

3)<u>R. Kobayashi</u>, ``対数 Sobolev 不等式，エントロピー公式，Riemann 幾何的熱浴 －Perelman による Ricci flow へのアプローチ, II'', 数学（岩波）60-4.2008.352-367.（査読あり）

4)<u>R. Kobayashi,</u> ``Transversal Ricci flow unstable cell centered at a transversal Einstein metric on the twistor space of positive quaternion Kaehler manifolds'', Lect. Note Ser. In Math. 9. 2008. 31-52. ISBN 978-4-9008990-7-0.Osaka Univ.　（査読あり）

5)<u>R.Kobayashi</u> and R.Miyaoka, ``Nevanlinna-Galois theory for algebraic minimal surfaces'', to appear in Proc. Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization, Dec. 2008.Osaka City Univ.　（査読あり）

6)　<u>R.Kobayashi,</u> ``An Attempt toward Diophantine analogue of ramification counting in Nevanlinna theory : Truncated counting function in Schmidt's Subspace Theorem (Preliminary version)'', RIMS 講究録 1451. 2005. 72-111.（査読なし）.

〔学会発表〕（計　5　件）

1) <u>R. Kobayashi,</u> ``Transversal Ricci flow unstable cell centered at a transversal Einstein metric on the twiastor space of positive quaternion Kaehler manifolds'', Complex

Geometry in Osaka, 2 November 2008.Osaka Univ.
2) R. Kobayashi, Period condition of algebraic minimal surfaces and Nevanlinna theory'', Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization, 20 Dec. 2008. Osaka City Univ.
3) Ryoichi Kobayashi, ``Nevanlinna-Galois theory of algebraic minimal surfaces'', Geometry of Holomor hic and Algebraic Curves in Algebraic Varieties, Univ. Montreal. 1 May 2007.
4) Ryoichi Kobayashi, Ricci flow unstable cell and twistor space of positive quanernion Kaehler manifolds'', Extremal Kaehler metrics and Kaehler Riocci flow, Centro di Recerca Mathematica (Pisa), 28 March, 2008.
5) Ryoichi Kobayashi, Some dynamical property of the Ricci flow on the btwistor space of positive quaternion Kaehler manifolds'', Geometry and Quantization, Steklov Math. Inst. Moscow, 18 September, 2007.

６．研究組織
(1)研究代表者
小林　亮一 (Ryoichi Kobayashi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：20162034

(2)連携研究者
楯　辰哉 (Tatsuya Tate)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：00317299

満渕　俊樹 (Toshiki Mabuchi)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80116102

榎　一郎 (Ichiro Enoki)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：20146806

二木　昭人 (Akito Futaki)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90143247

翁　林 (Lin Weng)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：60344002

山の井　克俊 (Katsutoshi Yamanoi)
熊本大学・理学部・准教授
研究者番号：40335295