

平成21年 4月30日現在

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340002

研究課題名（和文） リジッド幾何学と数論への応用

研究課題名（英文） Rigid geometry and its application to number theory

研究代表者

藤原 一宏 (FUJIWAWA KAZUHIRO)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00229064

研究成果の概要:研究分担者, 連携研究者の協力の下, リジッド幾何学の基礎付けを研究した. 特に, EGA III より一般の枠組みで形式幾何学を展開している. 基礎付けの応用としてスキームおよび代数空間の永田コンパクト化の構成など, 代数幾何学での基本的な定理がある. また, 可換環の完備化の理論の(非ネーター環を含む)再構成等でも新たな見方を提示しており, 形式スキームとしてのネーター性がなくてもリジッド空間としてのネーター性があれば十分であることを発見した. これは特に R. Huber による adic space の理論が成立する枠組みを明快にするものである. 基礎付け一般の結果は加藤文元(京都)との共著として発刊する予定である.

交付額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,900,000	0	3,900,000
2006年度	3,200,000	0	3,200,000
2007年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
2008年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
総計	14,100,000	2,100,000	16,200,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：リジッド幾何学, 形式幾何学, 志村多様体, Zariski-Riemann 空間, 双有理幾何学, 非可換類体論

1. 研究開始当初の背景

リジッド幾何学は J. Tate により 1960年代に創始された p -進解析幾何学である. その歴史の長さと比較すると, 基礎として確立されている部分は決して多くなかった. 様々な応用, 特に数論や代数幾何学での応用, の増加に対応した基礎付けが必要とされていた. 特に, A. Grothendieck により創始された形式幾何学との関連が M.

Raynaud により 60年代終わりに発見されたが, 形式幾何学では強い有限性(ネーター性)が仮定されることが多く, これらの技術的な制約を受けない基礎付けが求められていた.

2. 研究の目的

この研究の目的はリジッド幾何学の堅固な枠組み, 基礎を提供すること, またその整

数論・(代数)幾何学への応用を与えること、の二つである。交付期間中、代数幾何学、特に双有理幾何学との関連を明確にした基礎・基本文献の提供を目指す。後者については、志村多様体の局所モデルの構造や p -進的な保型形式の研究との関連、またより刺激的な研究対象としてミラー対称性予想との関連、特に Mirror partner の構成に応用できるか検討する。

3. 研究の方法

金銅は具体的なユニタリ志村多様体の例を提供し、藤野は双有理幾何学の視点を提供する。リジッド幾何学の基礎については、主として加藤文元(京都大学)との共同研究として行う。また、内容も新しいものを多く含むため、慎重にチェックする必要がある。そのため海外の研究者とも連絡を密にし、研究体制を確立する。研究代表者は非可換類体論・リジッド幾何学の立場からこれらを総括する。

4. 研究成果

(1) この研究ではリジッド幾何学の研究は形式幾何学と深く関連している。まず、形式幾何学の基礎についてであるが、O. Gabber (IHES), 加藤文元との共同研究により、研究計画の開始当初に構想していた枠組み (universally adhesive formal scheme) より広いクラス (universally rigid noetherian formal scheme) で基礎付けがなされることがわかった。直感的には、ネーター性を定義イデアル外で仮定し、さらに位相的な有限型拡大で閉じるようにしたものである。特に EGA III より一般の枠組みで形式幾何学が展開され、ネーター的な場合に知られていた基礎的な定理の大部分が広いクラスに拡張される。この拡張では可換環の完備化の理論の(非ネーター環を含む)拡張が必要となり、従来のネーター性を仮定する議論に環論的に新たな見方を提示している。これは特に R. Huber による adic space の理論が成立する枠組みを明快にするものでもある。可換環論の部分については現在論文を準備中であり、O. Gabber, 加藤文元との共著論文として発刊する予定である。

これら形式幾何学での結果を使い、形式幾何学と双有理幾何学の hybrid としてリジッド幾何学の拡張がなされる。双有理幾何学の見方は、O. Zariski による抽象リーマン面をリジッド空間に対して定義するためにも使われ、この理論において本質的な役割を果たしている(この構成は研究代表者の

90年代の研究に基づく)。GAGA 型の比較定理など、主要な定理の一部分は加藤文元との共著として発刊する予定である(に関連した報告がある)。

リジッド幾何学の代数幾何学への直接的な応用としてスキームおよび代数空間の永田コンパクト化の構成などの基本的な定理がある。この研究については 2009年1月の東京大学で行われた国際研究集会で招待講演を行った。

(2) 2次元ガロア表現の剰余表現が可約である場合に、その (nearly ordinary な) 不変変形環がどのようなものになるか、従来明確な予想がなかった。代表者はこの問題を取り上げ、明確な予想の定式化を与えた。予想の定式化にはリジッド幾何学の考え方、定式化が使われる。特にこの予想は、剰余表現が標数 0 の既約表現に持ち上げられるための条件と深く関係しているが、特別な場合に持ち上げの存在を示した

この予想、及びその証拠となる結果については 2006年9月に京都大学で行われた国際研究集会で招待講演を行った。

(3) 幾何学的な Jacquet - Langlands 対応についてはユニタリ志村多様体の場合に 2006年8月にスペインで行われた国際数学者会議での講演で発表している。その際、一般的な保型表現の関手性が p -進補間でも保たれるはずであるという方向性をはっきりと打ち出している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

① Kato, K., Saito, T., Ramification theory for varieties over a perfect field, Ann. of Math., 168, 33-96, 2008, 査読あり

② Saito, S., Asakura, M., Maximal components of Noether-Lefschetz locus for Beilinson-Hodge cycles, Math. Ann., 341, 169-199, 2008, 査読あり

③ Kato, F. On the Shimura variety having Mumford's fake projective plane as a connected component, Math. Z., 259, 631-641, 2008, 査読あり

④ Lewis, James D., Saito, S., Algebraic cycles and Mumford-Griffiths invariants, Amer. J. of Math., 129, 1449-1499, 2007

⑤ Abbes, A., Saito, T., The characteristic class and ramification of an l -adic étale sheaf, *Invent. Math.*, 168, 567–612, 2007, 査読あり

⑥ Kondo, S., Maximal subgroups of the Mathieu group M_{23} and symplectic automorphisms of supersingular K3 surfaces, *Int. Math. Res. Not. Art. ID 71517*, 2006, 査読あり

⑦ Fujiwara, K., Kato, F., Rigid geometry and applications, *Advanced Studies in Pure Math.*, 45, 327–386, 2006, 査読あり

⑧ Fujiwara, K., Galois deformations and arithmetic geometry of Shimura varieties, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Madrid 2006*, 347–371, 2006, 査読なし

[学会発表] (計 13 件)

① Fujiwara, K., Compactifications of schemes and algebraic spaces, *Arithmetic Algebraic Geometry Related to Moduli Spaces*, University of Tokyo, January 21, 2009.

② Kato, F., Topological rings in rigid geometry, *Motivic Integration and its Interaction with Model Theory and Non-Archimedean Geometry*, ICMS, Edinburgh, May 15th, 2008.

③ Kondo, S., Non-symplectic automorphisms of K3 surfaces and ball quotients, *Conference on Moduli spaces*, Warwick, UK, July 9, 2008.

④ Saito, S., A conjecture of Colliot-Thélène on zero-cycles over local fields, *Géométrie arithmétique et variétés rationnelles*, CIRM, Luminy, December 7, 2007.

⑤ Kondo, S., The moduli of plane quartics and Borchers products, *Modular forms and moduli spaces*, Satellite meeting for Festival dedicated to 300th birthday of Leonhard Euler, Saint-Petersburg, Russia, July 4, 2007.

⑥ Fujiwara, K., Iwasawa theory and non-abelian class field theory, *MFO (Oberwolfach, Germany)*, June 18–22, 2007.

⑦ Saito, T., Wild ramification and the characteristic cycle of an l -adic sheaf, *A Conference Dedicated to the Mathematical Heritage of Spencer J. Bloch*, Fields Institute, Toronto, March 23, 2007.

⑧ Fujiwara, K., Iwasawa theory and non-abelian class field theory, *CIRM (Luminy, France)*, June 11–15, 2007.

⑨ Kondo, S., The moduli of 8 points on the projective line and automorphic forms, *Modular forms*, Schiermonnikoog, Netherlands, October 9–13, 2006.

⑩ Fujiwara, K., Problems around Hecke algebras for $GL(2)$, *Arithmetic Algebraic Geometry*, Kyoto University (Kyoto, Japan), September 11–15, 2006.

⑪ Saito, T., Ramification of schemes over a local field (joint work with K. Kato), *Arithmetic Algebraic Geometry*, El Escorial, Spain September 4, 2006.

⑫ Fujiwara, K., Galois deformations and arithmetic geometry of Shimura varieties, *International Congress of Mathematicians*, (Madrid, Spain), August 22–30, 2006.

⑬ Saito, S., Weak Bloch–Beilinson conjecture for zero-cycles over local fields, *Cohomological approaches to rational points*, MSRI, Berkeley, March 29, 2006.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤原 一宏 (FUJIWARA KAZUHIRO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
研究者番号：00229064

(2) 研究分担者

宇澤 達 (UZAWA TOHRU)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
研究者番号：40232813

金銅 誠之 (KONDO SHIGEYUKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
研究者番号：50186847

藤野 修 (FUJINO OSAMU)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
准教授
研究者番号：60324711

(3) 連携研究者

加藤 文元 (KATO FUMIHARU)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：50294880

斉藤 秀司 (SAITO SHUJI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50153804

斉藤 毅 (SAITO TAKESHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：70201506