

平成 21 年 5 月 4 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340007

研究課題名 (和文) ディオファントス幾何とモジュライの問題

研究課題名 (英文) Diophantine geometry and moduli problems

研究代表者

森脇 淳 (MORIWAKI ATSUSHI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70191062

研究成果の概要：

本研究では双有理アラケロフ幾何で大きな成果を得た。特に、算術的体積関数に関して数々の重要な成果を得た。その中には、算術的体積関数の連続性があり、これにより、それまで得られていた種々の結果を総合的にかつより一般的に扱えるようになった。また、藤田の近似定理の算術化のさらなる一般化にも成功した。その他にも、狭義の切断からなる自由基底がいつ存在するかというアラケロフ幾何の基本問題の解決もできた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,600,000	0	3,600,000
2006年度	4,900,000	0	4,900,000
2007年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
2008年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
年度			
総計	15,300,000	2,040,000	17,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何学、数論幾何、ディオファントス幾何、アラケロフ幾何

## 1. 研究開始当初の背景

ファルティンガスのモデル予想の研究にもある様に、数論幾何の研究とモジュライ空間の研究には密接な関係がある。特に、アーベル多様体、および代数曲線のモジュライ空間は重要である。このことが研究開始当初の強い背景としてあった。特に、次の3つの課題を解決すべき問題として考えていた。

- (1) いろいろな大域的な体上定義された代数多様体の有理点の分布の問題
- (2) モジュライ空間上の代数的サイクルの問題

## (3) 対数スキームのモジュライ空間の問題

## 2. 研究の目的

広くディオファントス幾何とモジュライ空間の幾何を研究することを目的としている。特に有理数体上有限生成な体上定義された代数多様体は、大域的に考える場合、まさにモジュライ空間とディオファントス幾何をつなげるものである。これらを総合的に研究することが目的である。その研究を遂行するためにはアラケロフ幾何が必要であり、双

有理アラケロフ幾何の基礎付けが重要な課題となる。これも本研究の重要な目的の一つである。

### 3. 研究の方法

アラケロフ幾何, 特に, 双有理アラケロフ幾何を用いた研究方法をとった。双有理アラケロフ幾何の基本的な事実の蓄積から始め, 種々の応用を考えた。小さな切断に関する事実は研究を遂行する上で特に重要で, 知られている結果は, さらなる研究をする上では不十分なものである。したがって, これらの研究は必要不可欠である。特に, 算術的体積関数のコントロールは極めて重要である。

### 4. 研究成果

研究成果は多岐にわたるので, いくつかあるので内容に応じて並べて書きたい。

(1) まずは, 雑誌論文⑥の成果であるが, これは本申請のタイトルそのものの成果である。モデル予想の解決の鍵となったのは, 代数体上におけるガロア表現の制御と代数体上定義されたアーベル多様体のモジュラー関数の有界性に関する性質であった。この論文ではさらに一般に有理数体上有限生成な体上定義されたアーベル多様体に関してモジュラー関数を定義し, それがアーベル多様体のモジュラー空間上の高さ関数を定めることを示した。さらに, それが有界性に関する性質をもつことも示した。この研究において重要な役割を果たしたのがアラケロフ幾何で, 後述する双有理アラケロフ幾何に関する種々の結果につながるものである。また, この結果は生駒氏の論文で使われ, 代数体上定義された楕円曲線についてのテート予想の解決の重要な道具となった。

(2) 雑誌論文⑤の結果を書く。これは岩成氏との共同研究である。この論文ではいわゆる加藤予想を解決した。代数多様体から一般型の代数多様体への支配的有理射は有限であるというのは小林・落合の結果としてよく知られている。これが対数的スキームのカテゴリーで成り立つかという問いが加藤予想である。論文では, 半安定な代数的スキーム上の対数構造を考え, このカテゴリーでの加藤予想を解いた。その過程において, 半安定な代数的スキーム上の対数構造を分類し, 半安定な代数的スキーム上の剛性定理を確立した。これが予想解決の鍵であった。

(3) 雑誌論文④の結果を書く。これは, 雑誌論文⑤で確立された剛性定理の一般化である。雑誌論文⑤において証明された剛性定理は代数閉体上におけるものであった。これを一般のネータースキーム上に拡張したのがこの論文の主結果である。

(4) 次に雑誌論文③の結果を書く。この論文において Harder-Narasimham フィルトレーションの高次元算術多様体上での算術化に成功した。これのさらなる応用を現在考えているところである。

(5) 雑誌論文②の結果を書く。この論文結果は双有理アラケロフ幾何の創設を意味し, 極めて重要であるので詳説する。

アラケロフ幾何は, Arakelov の論文

「Intersection theory for divisors on an arithmetic surface, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 (1974), 1179-1192 AMS Translation 8, (1974), 1167-1180」に始まる。1次元のアラケロフ幾何と言える Minkowski による数の幾何学を原型とする算術曲面上における代数・幾何・解析の融合による新しい幾何学の提唱であった。この論文において, Arakelov は当初の目的をある程度完成させたが, 不十分なものであった。これを完全なものにしたものが, Faltings による論文「Calculus on arithmetic surfaces, Ann. of Math. 119 (1984), 387-424」であり, 算術曲面上での Riemann-Roch の定理, Noether の公式等が確立された。つづいて, その高次元化が課題となったが Gillet-Soule の論文

「Arithmetic intersection theory, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 72 (1990), 93-174」により, 高次元算術多様体上での交点理論が構築され, 彼らの論文「An arithmetic Riemann-Roch theorem, Invent. Math. 110 (1992), 473-543」において算術的 Riemann-Roch の定理が証明された。彼らの理論による典型的な応用は, エルミート可逆層におけるノルムの小さなゼロでない大域切断の存在定理である。種々の形が存在するが, 最も強く一般的な形の結果は Zhang の論文「Positive line bundles on arithmetic varieties, J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), 187-221」によるもので, Bogomolov 予想の証明の鍵となったものであった。しかしながら, Zhang による結果は, 通常の変換幾何の立場から見た場合, 非常に強い仮定 (生成ファイバー上で可逆層が豊富等) のもとでのノルムの小さなゼロでない大域切断の存在定理であり, 10 数年の間, この方面の研究は停滞していた。この状況をブレイクスルーしたのが, 雑誌論文②の結果である。この論文により双有理アラケロフ幾何の研究の端緒が開かれた。

双有理アラケロフ幾何において, 最も需要量の一つは算術的体積関数である。X は d-次元射影算術多様体, L は X 上の連続な計量をもつ可逆層とする。このとき, L の算術

的体積  $\text{vol}(\mathbf{L})$  は

$$\text{vol}(\mathbf{L}) := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \#\{s \in H^0(m\mathbf{L}) \mid \|s\|_{\text{sup}} \leq 1\}}{m^d/d!}$$

で定義される. 非負の整数  $n$  に対して,  $\text{vol}(n\mathbf{L}) = n^d \text{vol}(\mathbf{L})$  が成り立つことが知られているので,  $\text{Pic}_{C^0}(X)$  で  $X$  上の連続な計量をもつ可逆層の同型類からなる群を表すと,  $\text{vol} : \text{Pic}_{C^0}(X) \rightarrow \mathbf{R}$  は自然に  $\text{vol} : \text{Pic}_{C^0}(X) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$  に拡張することがわかる. このとき, 雑誌論文②において証明された  $\text{vol}$  の連続性とは以下を意味する.

[算術的体積関数の連続性]

$\mathbf{L}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$  は  $X$  上の連続な計量をもつ  $\mathbf{Q}$ -可逆層とする. このとき,  $\mathbf{L}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$  のみによる定数  $C$  が存在して, 絶対値が 1 以下の任意の有理数  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  に対して,

$$\left| \text{vol}(\mathbf{L} + \varepsilon_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \varepsilon_r \mathbf{A}_r) - \text{vol}(\mathbf{L}) \right| \leq C(|\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_r|)$$

が成り立つ.

この結果により次の一般化された Hodge の指数定理と呼ばれる一般的な状況での小さな切断の存在定理が導かれる. これより, 例えば, 算術的 Bogomolov 不等式もこの結果の結論となる. その他にも, ネフな  $X$  上の  $C^\infty$  な計量をもつ  $\mathbf{Q}$ -可逆層  $\mathbf{L}$  がビックであるための必要十分条件は  $\deg(\mathbf{L}^d) > 0$  であることもわかる.

[一般化された Hodge の指数定理]

$\mathbf{L}$  は  $X$  上の  $C^\infty$  な計量をもつ  $\mathbf{Q}$ -可逆層とし,  $\mathbf{L}$  は  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$  のファイバーに沿ってネフであり,  $c_1(\mathbf{L})$  が半正であると仮定する. このとき,  $\text{Vol}(\mathbf{L}) \geq \deg(\mathbf{L}^d)$  が成り立つ.

この論文を契機に雑誌に投稿中のものを含む種々の論文があるがこれについては, 以下の (6) 以降で書く.

(6) 雑誌論文①においては以下のような雑誌論文②の拡張を行った. すなわち, 雑誌論文②では連続な計量をもつ  $\mathbf{Q}$ -可逆層に対して体積関数の連続性を証明したが, これを連続な計量をもつ  $\mathbf{R}$ -可逆層に対しても成り立つことを示した. このことを証明するために, 雑誌論文②において鍵となった基本不等式を多重変数の場合に拡張した.

(7) 投稿中の成果としては, 以下の 2 つがある.

④ 森脇淳, Free basis consisting of

strictly small sections,  
(arXiv:0903.3778).

⑤ 森脇淳, Estimation of arithmetic linear series, (arXiv:0902.1357)

④においては, 従来知られていた可逆層の切断の空間がいつ狭義の小さい切断からなる基底をもつかという Zhang による結果を拡張した. Zhang による結果は, 生成ファイバー上で可逆層が豊富, 及び, チャーン形式が半正である等の双有理アラケロフ幾何の立場から考えるとかなり強い仮定をおくものであったが, 適切な条件に置き換えた. 具体的には, 例えば, 以下のような結果を示した.

$X$  は射影算術多様体とし,  $\mathbf{L}$  は連続な計量をもつエルミート可逆層とする. ある正の整数  $n_0$  と狭義の小さい切断

$$s_1, \dots, s_n \in H^0(X, n_0\mathbf{L})$$

が存在して,  $s_1, \dots, s_n$  は  $\mathbf{Q}$  上で共通零点を持たないと仮定する. このとき,  $n$  が十分に大きな整数のとき,  $H^0(X, n\mathbf{L})$  は狭義の小さい切断からなる基底を持つ.

⑤においては, Yuan と Chen により, 示された算術的藤田の近似定理の拡張を示した. Yuan による算術的藤田の近似定理の証明は, Mustata と Lazarsfeld によって代数多様体上で用いられた Okounkov のアイデアの算術化による. その手法をさらに広い対象に対して利用可能とすることは, 双有理アラケロフ幾何の発展のために不可欠と考え, そのこと考察を行った. まずは, 代数多様体における線形系の概念の算術化を考えるため, 凸格子を導入し, それに対して, Yuan の結果を拡張した. 具体的には, 以下のような結果を得た.

$X$  は  $d$ -次元射影算術多様体,  $\mathbf{L}$  は連続計量をもつエルミート可逆層とする. さらに,  $K$  は  $H^0(X, \mathbf{L})$  の凸格子とする. このとき,  $v$  は素数  $p$  上のよい旗から定まる  $X$  上の付値ベクトル関数とすると, 次の不等式が成り立つ.

$$\left| \#v(K \setminus \{0\}) \log(p) - \log \#(K) \right| \leq \text{rank}\langle K \rangle_{\mathbf{Z}} (\log(4p \text{rank}\langle K \rangle_{\mathbf{Z}}) + \log(4) \text{rank}(H^0(0_x))) \\ (\sigma(\mathbf{L}) + \log(2p \text{rank}\langle K \rangle_{\mathbf{Z}})) / (\log(p))$$

ここで,  $\sigma(\mathbf{L})$  はすべての  $C^\infty$  計量をもつ豊富なエルミート可逆層  $\mathbf{A}$  を考えたときの

$$\deg(c_{-1}(\mathbf{A})^{d-1} c_{-1}(\mathbf{L})) / (\deg(\mathbf{A}^{d-1})).$$

の下限である. この結果の応用として, Yuan

の予想していた結果を証明することができ、さらに算術的体積関数の諸結果を算術的制限体積関数に拡張することができた。

(8) 図書であるが、アラケロフ幾何の諸結果をまとめた和書がなかったため、岩波書店の数学叢書の一つとして出版したのが①の図書である。双有理アラケロフ幾何の最近の成果を取り入れた本となっており、海外でも類を見ない本となっている。翻訳の計画が持ち上がっている。本書の内容を具体的に示すため、以下にその目次を掲げておく。

1. 準備
2. 数の幾何
3. 算術曲線上のアラケロフ幾何
4. 算術曲面上のアラケロフ幾何
5. 一般の算術多様体上のアラケロフ幾何
6. 算術多様体上の体積関数と連続性
7. 算術多様体上における中井-Moishezon の判定法
8. 算術的 Bogomolov 予想
9. Lang-Bogomolov 予想

図書②では研究集会で発表された成果を英文の査読付きの論文集としてまとめた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① 森脇淳, Continuous extension of arithmetic volumes, International Mathematics Research Notices に掲載予定, 査読有り
- ② 森脇淳, Continuity of volumes on arithmetic varieties, J. Algebraic Geometry, 18, 407-457, 2009, 査読有り
- ③ 森脇淳, Subsheaves of a hermitian torsion free coherent sheaf on an arithmetic variety, J. Math. Kyoto Univ., 48, 7-26, 2008, 査読有り
- ④ 森脇淳, Rigidity of log morphisms, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 44, 371-401, 2008, 査読有り
- ⑤ 岩成勇, 森脇淳, Dominant rational maps in the category of log schemes, Tohoku Math. J., 59, 481-525, 2007, 査読有り
- ⑥ 森脇淳, On the finiteness of abelian varieties with bounded modular height, Moduli spaces and arithmetic geometry, Adv. Stud. Pure Math., 45, 157-187, 2006, 査読有り

[学会発表] (計 4 件)

- ① 森脇淳, Free basis consisting of strictly small sections, Paris, Barcelona, Kyoto intercity seminar, 2009年3月18日~19日, パリ7大学
- ② 森脇淳, Continuity of volumes on arithmetic varieties -- toward birational Arakelov geometry, Arakelov geometry seminar, 2008年2月18日, パリ7大学
- ③ 森脇淳, 算術多様体の Hilbert--Samuel 公式, 代数学シンポジウム, 2007年8月6日~9日, 神戸大学
- ④ 森脇淳, Rigidity of log morphisms, Arakelov Geometry, 2005年9月11日~17日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

[図書] (計 2 件)

- ① 森脇淳, アラケロフ幾何, 岩波書店、2008年, 421ページ
- ② 向井茂, 宮岡洋一, 森重文, 森脇淳, 中村郁, Moduli spaces and arithmetic geometry, Advanced Studies in Pure Mathematics, 45, 日本数学会, 432ページ

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

森脇淳 (MOROWAKI ATSUSHI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 70191062

(2) 研究分担者

上野 健爾 (UENO KENJI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 40011655

加藤 和也 (KATO KAZUYA)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 90111450

深谷 賢治 (FUKAYA KENJI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 30165261

中島 啓 (NAKAJIMA HIRAKU)  
京都大学・数理科学研究所・教授  
研究者番号: 00201666

玉川 安騎男 (TAMAGAWA AKIO)  
京都大学・数理科学研究所・教授  
研究者番号: 00243105

加藤 文元 (KATO FUMIHARU)  
京都大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：50294880  
(3)連携研究者  
川口 周 (KAWAGUCHI SHU)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：20324600