様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2005～2008
課題番号：１７３４００１０
研究課題名（和文）精密化された岩澤理論とゼータ関数

研究課題名（英文） Refined Iwasawa theory and the zeta functions

研究代表者
栗原 将人（KURIHARA MASATO）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40211221

研究成果の概要：従来の岩澤理論では、岩澤主予想という、数論的対象物への Galois 群の作用の特性多項式と p 進 L 関数との関係、が主テーマであったが、数論的対象物と解析的対象物との間にはもっと深い関係があることが証明できた。また、Gauss 和型の Euler 系の理論、Gauss 和型の Kolyvagin 系の理論を構成し、Galois コホモロジーの中にゼータ関数の値と関係するよい元の系列が存在することを証明した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2005 年度	3,000,000	0	3,000,000
2006 年度	1,900,000	0	1,900,000
2007 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
総　計	8,600,000	1,110,000	9,710,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：整数論

１．研究開始当初の背景
岩澤理論の中核をなすのは、いわゆる岩澤主予想と呼ばれる関係である。この関係を簡潔に述べると、イデアル類群などの数論的に非常に重要な群への Galois 群の作用から決まる特性多項式が、p 進 L 関数というゼータ関数の p 進解析的な化身と一致する、というものである。この予想は、上記のイデアル類群の場合には、Mazur と Wiles により 1980 年代に最終的に解決された。その後、岩澤理論ではイデアル類群以外の重要な対象、たとえば楕円曲線の Selmer 群やモチーフに伴う p 進表現のコホモロジーに一般化しようという研究がなされてきたが、そのときの指導原理は常にこの岩澤主予想であった。我々はこの研究を開始する以前の段階で、ある種の場合に、イデアル類群や Selmer 群などの Galois 群の作用をこめた加群の構造を、何らかの形、少なくとも岩澤主予想よりも詳しい精密な形で、ゼータ関数もしくは p 進ゼータ関数から取り出せるということがわかっていた。すなわちイデアル類群と p 進ゼータ関数の間には、今まで考えられていたより深い関係が存在することがわかってきていた。たとえば、従来のように Galois 群が Z_p のときの特性イデアルだけでなく、Galois 群が Z_p と有限 Abel 群の直積のときの代数的対象と解析的対象の間の関係

がいろいろとわかってきていた。そこで、このような精密化された岩澤理論をさらに整理して明確にすること、およびこの理論がどの程度一般化できるのかを研究したいと考えた。

２．研究の目的

ここではこの研究の目的をもう少し具体的に述べる。上で述べたように、岩澤理論では、イデアル類群やある種のコホモロジー群をGalois 群が作用する加群とみて、その様子を調べる。今までの研究で扱われていた特性イデアルは、加群の 0 次の Fitting イデアルに対応している。この研究では、さらに進んで、Selmer 群やコホモロジー群のすべての高次の Fitting イデアルがどうなるか、ということを調べたいと考えた。すなわち i 次の Fitting イデアルが、すべての i > 0 に対して、p 進解析的対象、たとえば p 進ゼータ関数や部分ゼータ関数を使って作られる元で、どの程度記述できるか、ということを調べたいと考えた。簡単な場合で言うと、これは位数や特性イデアル以上のもっと詳しい情報をゼータ関数から引き出すことを意味する。

また、0 次の Fitting イデアルについても、作用する Galois 群が Z_p 以外のときに詳しく調べることが目的である。このことは、高次の Fitting イデアルを調べるときの基礎にもなる。一般の状況での 0 次の Fitting イデアルが解析的対象とどのような関係にあるかを調べ、一般論を構築することが目的であった。

３．研究の方法

(1) コホモロジー群の中の新しい元の系列の理論

以下のような、新しい理論を構成することによって、上記のような問題に取り組んだ。Euler 系の理論で Selmer 群などのコホモロジー群の大きさを上から評価するときに、今までは、本質的に離散付値環上の議論を行っていた。これをもっと一般の環の上での議論に一般化することが必要であった。このような議論を行うことによって、Euler 系の議論がなぜうまくいくかということについて、新しい観点が与えられることにもなった。また、Gauss 和型の Euler 系という新しい型の Euler 系の理論を構成した。さらに Euler 系だけでなく、最近の Mazur と Rubin による Kolyvagin 系の理論が本質的に必要であった(これは Kolyvagin derivative と似ているが、実はもっと強い概念である)。われわれの場合には、Mazur と Rubin が扱わなかった Gauss 和型の Kolyvagin 系の理論を構成する必要があった。以上のような理論をなるべく一般的な Galois 表現に対して構成することを考えた。

(2) 0 次 Fitting イデアルの計算

上記のような高次の Fitting イデアルを計算するときにも、一般の体上での 0 次 Fitting イデアルの計算が重要になってくるので、なるべく一般的な Abel 拡大体上の、多くの数論的対象に対して、0 次 Fitting イデアルを計算し、ゼータ関数の値のような解析的対象物(もう少し詳しく書くと、Stickelberger 元の類似物)との間の関係をつけることを考えた。

４．研究成果

(1) 強い型の Brumer 予想について

①総実代数体 k 上の CM 体 K で、K/k が Abel 拡大であるものを考える。K のイデアル類群 Cl_{K} を Z[Gal(K/k)] 加群と見て、0 次の Fitting イデアル F_{0} を考える。ゼータ関数の値から作られる Stickelberger 元 θ_{K/k} に対し、θ_{K/k} に 1 の冪根の零化域を掛けたものは整であり、Cl_{K} を消すことが予想されている(Brumer 予想)。そこで Brumer 予想を強めて、θ_{K/k} に 1 の冪根の零化域を掛けたものがイデアル類群の Fitting イデアル F_{0} に入るか、という問題が重要な問題になってくる(強い型の Brumer 予想)。われわれの研究で、この性質は一般的には成立しないことがわかった。もう少し詳しく書くと、整な θ_{K/k} であって、F_{0} に入らないような K/k が存在することを証明した。K/k と F_{0}の具体的な数値例も与えることができた。以上のことは、関数体上では知られていたが、代数体上では初めての結果であった。

②上記のように、Stickelberger 元が F_{0} に入らない例がたくさんあることを示したが、上で述べた例の場合は、Stickelberger 元はイデアル類群の Pontryagin 双対の Fitting イデアルに入っており、Pontryagin 双対を使えば、強い型の Brumer 予想が成立する可能性がまだあった。しかし、この双対を使った強い型の Brumer 予想も成立しないことを、1 の p 冪根が K に含まれる場合に確かめた。このように、完全に一般の場合の Fitting イデアルを Stickelberger 元だけで書き表すのは難しいことがわかったが、まだ Brumer 予想そのものがどのように成り立つかのメカニズムもわかっておらず、さらなる研究が必要であるように思われる。

③拡大 K/k に(小さな仮定と)ある(強い)条件 (A_p)を課せば、強い型の Brumer 予想が成り立つことを証明した。特に Brumer 予想そのものがこのときには証明できる。今まで Brumer 予想が知られていたのは、主に p 進 L 関数が非自明な零点を持たない場合であったが(Greither の結果)、われわれの方法は非

自明な零点があっても適用できるところがすぐれており、興味深いものであると思われる。
④有理数体上の虚 Abel 体について、強い型の Brumer 予想が成立することを証明した。より正確には、2 冪部分を除いて、有理数体上の虚 Abel 体のイデアル類群の Fitting イデアルを完全に決定することができた。これは Mazur と Wiles による open question に答える結果である。

(2)楕円曲線のｐ進Ｌ関数と有理点の群との間の関係
有理数体上に定義された楕円曲線 E に対し、その数論的性質と zeta 関数との関係の典型例は、L 関数の s=1 での値が消えることと E の Mordell Weil 群が位数無限になることとが同値である、という Birch Swinnerton-Dyer 予想である。われわれは、E の Mordell Weil 群が位数無限になることと同値になるであろう p 進 L 関数についての新しい関係(通常の p 進 Birch Swinnerton- Dyer 予想とは異なるもの)を見つけ、それを部分的に証明した。また Mordell Weil 階数が 1 のときは、この関係を数値的に計算することにより、組織的、p 進的に有理点を見つけることができることを示した。このような方法は Stark 単数の類似であるとも考えることができ、大変興味深いものであると考えている。

(3) 高次の Fitting イデアルについて
総実代数体 k とその上の Abel 拡大体 K で拡大次数が p と素、K は CM 体であるものを考える。K の円分 Z_p 拡大上の岩澤加群を X とする(すなわち、X は K の円分 Z_p 拡大の中間体のイデアル類群のｐ成分のノルム写像による射影極限であり、これはまた K の円分 Z_p 拡大の最大不分岐 Abel pro p-拡大の Galois 群と同型である)。このとき、X のマイナス部分の高次 Fitting イデアルをゼータ関数の値を起源とする元たちを使って、完全に記述することに成功した。このことは大分長い間成立するだろうと予想していたのだが、議論を整理することにより、きちんと証明することができたのである。この定理は、普通の岩澤主予想の精密化であり、イデアル類群のような代数的対象とゼータ関数の値のような解析的対象との間の、従来知られていたものより深い関係を表している。このことにより、たとえば次のような応用が得られる。岩澤加群の Galois 加群としての性質として、特性イデアルだけでなく、擬同型類をｐ進ゼータ関数の情報で決定できることがわかる。また、今まで知られていた有限次虚 Abel 体のイデアル類群の構造についての Rubin, Kolyvagin の定理は、この理論の氷山の一角としてとらえることができる。

(4) Gauss 和型の Euler 系、Kolyvagin 系の理論について
従来、よく研究されてきた円単数型の Euler 系とは異なる Gauss 和型の Euler 系について深く研究した。代数体の乗法群の場合、およびｐで通常還元を持つモチーフに伴うｐ進表現がある種の条件を満たす場合に、このような元の系列の存在について調べた。
　また、Gauss 和型の Kolyvagin 系について深く研究し、今まで Rubin や Mazur が考えていたような Kolyvagin 系とは異なる、新しい関係式をみたすことを見出し、その理論を構成した。これらの元の系列は、Brumer 予想(とその類似)から自然に構成される Euler 系を使って構成するのだが、この Euler 系が Rubin の言葉で、有限なものなので、Rubin や Mazur の Kolyvagin 系の一般論からは構成できない。われわれは、非常に繊細な議論を用いて、これらの元の系列を構成した。われわれの構成した新しい Kolyvagin 系は、ゼータ関数の値と直接結びつく非常に美しい性質を持っている。

(5) 岩澤理論に関する３つの国際研究集会
Iwasawa 2008 (ドイツ Irsee), Iwasawa 2006 (フランス、Limoges), Open questions and Recent developments in Iwasawa theory (アメリカ、Boston) に研究代表者、分担者が参加し、われわれの研究成果について講演し、世界中の研究者達と研究討論を行うことができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　20　件）
[1] Cornelius Greither and Masato Kurihara, Stickelberger elements, Fitting ideals of class groups of CM fields, and dualisation, Mathematische Zeitschrift 260 (2008), 905 – 930 (査読有)
[2] Kazuo Matsuno, On the 2-adic Iwasawa invariants of ordinary elliptic curves, International Journal of Number Theory 4 (2008), 403-422 (査読有)
[3] Taka-aki Tanaka, Remarkable algebraic independence property of certain series related to continued fractions, Diophantine analysis and related fields-DARF 2007/2008, AIP Conf. Proc. 976, Melville, NY, (2008), 190-204 (査読有)
[4] Masato Kurihara and Robert Pollack, Two p-adic L-functions and rational points on elliptic curves with supersingular

reduction, London Math. Society Lecture Note Series 320 (2007), 300-332 (査読有)
[5] Kazuo Matsuno, Construction of elliptic curves with large Iwasawa lambda-invariants and large Tate- Shafarevich groups、Manuscripta Math. 122 (2007), 289—304 (査読有)
[6] Ken-ichi Bannai and Shin-ichi Kobayashi, Algebraic theta functions and Eisenstein-Kronecker numbers, RIMS Kokyuroku Bessatsu B4 (2007), 63-77 (査読有)
[7] Masato Kurihara and Rei Otsuki, On the growth of Selmer groups of an elliptic curve with supersingular reduction in the Z_{2}-extension of Q, Pure and Applied Mathematics Quaterly 2 (2006), 557-568 (査読有)
[8] Taka-aki Tanaka, Algebraic independence of modified reciprocal sums of products of Fibonacci numbers, Tsukuba J. Math. 30 (2006), 345—361 (査読有)
[9] Masato Kurihara, Remarks on the lambda_p-invariants of cyclic fields of degree p, Acta Arithmetica 116 (2005), 199-216 (査読有)
[10] Yoshitaka Hachimori and Romyar Sharifi, On the failure of pseudo-nullity of Iwasawa modules, J. Algebraic Geometry 14 (2005), 567—591 (査読有)
[11] Taka-aki Tanaka, Algebraic independence of the values of power series, Lambert series, and infinite products generated by linear recurrences, Osaka J. Math. 42 (2005), 487-497 (査読有)

〔学会発表〕(計 10 件)
[1] Masato Kurihara, On the Stickelberger ideals for cyclotomic fields, The 14th Joint Workshop on Number Theory between Japan and Taiwan, Waseda University, 2009 年 3 月 9 日
[2] Masato Kurihara, Iwasawa theory and Stickelberger ideals, Pan Asian Number Theory Conference Pohang, Postech, 2009 年 1 月 10 日
[3] Masato Kurihara, Stickelberger elements and the structure of arithmetic objects, Iwasawa 2008, Irsee, Germany, 2008 年 7 月 1 日
[4] 栗原将人, 「岩澤理論における行列式表示」, ゼータ関数の行列式表示とその応用, 東京工業大学, 2008 年 3 月 27 日
[5] Masato Kurihara, Several elements related to zeta values, UK-Japan Winter School 2007 on Number Theory, Cambridge University, England, 2007 年 1 月 7 日
[6] 栗原将人, 「p 進ゼータ関数とその数論的応用」, 第 51 回代数学シンポジウム, 東京大学, 2006 年 8 月 6 日
[7] Masato Kurihara, Two p-adic L-functions and rational points on elliptic curves with supersingular reduction, Geometrische Strukturen in der Mathematik, 5th Symposium of the SFB, Muenster University, 2006 年 6 月 8 日
[8] 栗原将人, 「超特異還元を持つ楕円曲線の p 進 L 関数と有理点」, 第 11 回早稲田大学整数論研究集会, 2006 年 3 月 15 日
[9] Masato Kurihara, p-adic L-Functions and Rational Points of Elliptic Curves with Supersingular Reduction, Conference on L-functions, Kyushu University, 2006 年 2 月 22 日
[10] Masato Kurihara, Iwasawa theory and several elements in Galois cohomology, Open Questions and Recent Developments in Iwasawa Theory in honor of Ralph Greenberg's 60th Birthday, Boston University, 2005 年 6 月 17 日

６．研究組織
(1)研究代表者
栗原　将人 (KURIHARA MASATO)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40211221
(2)研究分担者
太田　克弘 (OTA KATSUHIRO)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40213722
田中　孝明 (TANAKA TAKAAKI)
慶應義塾大学・理工学部・助教
研究者番号：60306850
宮崎　琢也 (MIYAZAKI TAKUYA)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：10301409
塩川　宇賢 (SHIOKAWA IEKATA)
慶應義塾大学・理工学部・名誉教授
研究者番号：00015835
坂内　健一 (BANNAI KENICHI)
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：90343201
(3)連携研究者
松野　一夫 (MATSUNO KAZUO)
津田塾大学・学芸学部・准教授
研究者番号：40332936
八森　祥隆 (HACHIMORI YOSHITAKA)
東京理科大学・理工学部・講師
研究者番号：50433743
青木　美穂 (AOKI MIHO)
岡山理科大学・理学部・講師
研究者番号：10381451