

平成 21 年 5 月 22 日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2005 ～ 2008

課題番号：17340011

研究課題名（和文） 超平面配置の理論とその応用

研究課題名（英文） Hyperplane arrangements and their applications

研究代表者

寺尾 宏明 (Terao Hiroaki)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：90119058

研究成果の概要：

多重配置の自由性におけるふたつの基盤的な定理を証明した。ひとつは、多重超平面配置の自由性に関する「加除定理」であり、もうひとつは、多重自由超平面配置における「Solomon-Terao の定理の拡張」である（ともに、阿部拓郎（京大・理）と Max Wakefield (US Naval Academy) との共著）。これにより、多重超平面配置の具体的に自由性を論ずることが初めて可能になり、自由配置の本質的意味の理解に近づいた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
2006 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2007 年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2008 年度	3,700,000	1,110,000	4,810,000
年度			
総計	13,000,000	3,900,000	16,900,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：超平面配置・超幾何積分・鏡映群

## 1. 研究開始当初の背景

超平面配置の中心概念である自由配置の研究において、多重配置を用いた手法が吉永正彦（京大・理）によって 2004 年に開始されてはいたが、本研究開始当時は、具体的な多重超平面配置の自由性を判定することも容易ではなかった。

## 2. 研究の目的

超平面配置の研究においては、組合せ論、代数幾何、位相幾何、特異点、群論、特殊関数論、微分幾何、数理物理などが交錯している。また、素朴な対象であるだけに、数学の諸分

野のみならず、自然科学・社会科学の対象を記述する数学モデルの中に自然に登場する。以上を踏まえ、本研究の目的として、以下の 2 つを設定した。すなわち、(1)超平面配置それ自体の数学構造の研究、また、(2)数学内の他分野への応用のために必要な超平面配置の研究である。(1)においては、自由超平面配置を理解し、超平面配置の自由性が組み合わせ的に決まるかという著名な予想の解決に向けた研究を行う。

### 3. 研究の方法

目的(1)については、2005年度は、鏡映配置に対して、鏡映面に接触度  $n$  ( $n$  は 1 以上の整数)で接するベクトル場の加群についてすでに得られている結果とその帰結の意味するところを正しく理解することから始めた。すなわち、 $n=2$  の場合は、L. Solomon との共著論文(1998)、一般の  $n$  では、研究代表者の論文(2002)によって、上記加群が自由加群であることが示され、また、具体的な基底が得られていた。言い換えれば、鏡映配置は、重みをすべて等しく選んだときには、多重自由配置を与えている。一方、吉永正彦による結果(2004)によれば、自由配置の制限と多重自由配置の間にはベクトル束を通じて密接な繋がりがあがる。その意味で、この鏡映配置の多重自由性がどのような幾何学的・組合せの意味を持っているのか、を検討した。

目標(2)については、社会科学から派生した 1 次元ランキングのパターン数を求める問題は、中面配置と呼ばれる特別な超平面配置の部屋の数を求める問題に帰着できることは、本研究計画開始の直前にすでに Kamiya-Orlik-Takemura-Terao(2006)により、示されていたが、統計学は巨大な分野であり文献も多いので、まず、2005年度は、ランキングをあつかった統計学の既成理論の枠組の中に、研究代表者の考える超平面配置を用いた研究方法が何らかの形ですでに含まれうるかどうか、を検証した。2006年度以降は、有限環上の超平面配置の特性多項式に環の位数を代入した値を多くの実例を通して計算し、成立すべき定理の形を予測し、証明した。

### 4. 研究成果

2006年度から、研究代表者は北海道大学に異動し博士研究員の阿部拓郎(現在、京大)と Max Wakefield(現在、US Naval Academy)との共同研究を開始した。そこでは、多くの実例の計算と、微分加群の計算機を用いた具体的な計算を積み重ねることにより、上記の 2 定理の結果を予想することができ、2006年には一般的な証明に成功し、2008年に出版することができた。以下、2つの定理の内容を述べる。

#### 自由多重超平面配置の加除定理.

鏡映配置に限らず、一般の配置に重複度を付加した多重配置に関して、阿部拓郎、Max Wakefield 両氏と共同で、加除定理を定式化して証明した。これは重複度がすべて 1 である単純超平面配置の場合の研究代表者による加除定理(1980)を自然に拡張したものである。

#### 多重超平面配置に関する Solomon-Terao 型定理.

上記の 2 人との共同で、一般の多重配置について分解定理を証明した。これは、単純超平面配置の場合の分解定理(1981)の拡張であり、Solomon-Terao の定理(1987)の拡張でもある。

この 2 論文の成果により、今まで困難だった多重配置の自由性のチェックが劇的に簡易化された。このことは、具体的な実例を数多く調べる新方法が与えられたことを意味し、多くの実例チェックにより、いわゆる寺尾予想の(肯定的あるいは否定的な)解決に近づくことが期待される。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Abe Takuro, Terao Hiroaki, Yoshinaga Masahiko, Totally free arrangements of hyperplanes. Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), no. 4, 1405--1410. 査読有
- ② Kamiya Hidehiko, Takemura, Akimichi, Terao, Hiroaki, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. J. Algebraic Combin. 27 (2008), no. 3, 317--330. 査読有
- ③ Abe, Takuro, Terao, Hiroaki, Wakefield, Max, The Euler multiplicity and addition-deletion theorems for multiarrangements. J. Lond. Math. Soc. (2) 77 (2008), no. 2, 335--348. 査読有
- ④ Terao, Hiroaki, A correction to: "Bases of the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements" [Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 7, 2029--2034; MR2099414]. Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no. 7, 2639. 査読有
- ⑤ Abe, Takuro, Terao, Hiroaki, Wakefield, Max, The characteristic polynomial of a multiarrangement. Adv. Math. 215 (2007), no. 2, 825--838. 査読有
- ⑥ Terao, Hiroaki, Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem. Adv. Math. 214 (2007), no. 1, 366--378. 査読有

- ⑦ Orlik, Peter, Terao, Hiroaki, Arrangements and hypergeometric integrals. Second edition. MSJ Memoirs, 9. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2007. x+112 pp. 査読有
- ⑧ Kamiya, Hidehiko, Orlik, Peter, Takemura, Akimichi, Terao, Hiroaki, Arrangements and ranking patterns. Ann. Comb. 10 (2006), no. 2, 219--235. 査読有
- ⑨ Terao, Hiroaki, The Hodge filtration and the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. Manuscripta Math. 118 (2005), no. 1, 1--9. 査読有
- ⑩ Terao, Hiroaki, Bases of the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 7, 2029--2034. 査読有

[学会発表] (計 18 件)

- ① Terao, Hiroaki, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers, Finite Groups, vertex operator algebras and combinatorics, RIMS, Kyoto University, Jan. 6, 2009
- ② Terao, Hiroaki, Totally free arrangements of hyperplanes, Conference in Honour of Peter Orlik, Fields Institute, Toronto, Canada, Aug. 19, 2008
- ③ Terao, Hiroaki, On the free multiarrangements, Millican Lecture, Colloquium, University of North Texas, May 2, 2008
- ④ Terao, Hiroaki, On the free multiarrangements, Several Aspects of Hyperplane Arrangements, 1037TH American Mathematical Society Meeting, special session on Arrangements and Related Topics, Louisiana State University, Baton Rouge, LA, USA, Mar. 28, 2008
- ⑤ Terao, Hiroaki, Periodicity of integral arrangements modulo positive integers, Several Aspects of Hyperplane Arrangements, Kobe, Japan, Feb. 4, 2008.
- ⑥ Terao, Hiroaki, The characteristic quasi-polynomial of integral arrangements and root systems, CIMPA summer school ALS ¥& S 2007, Arrangements and Local Systems, Istanbul, Turkey, June 15, 2007.
- ⑦ Terao, Hiroaki, The characteristic polynomials of (multi)arrangements, CIMPA summer school ALS ¥& S 2007, Arrangements and Local Systems, Istanbul, Turkey, June 15, 2007.
- ⑧ Terao, Hiroaki, Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem, Braids and their Ramifications - Configuration Spaces, Arrangements, Mapping, Mapping-Class groups, 3-Manifolds, Cortona, Italy, May 24, 2007.
- ⑨ Terao, Hiroaki, Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem, American Mathematical Society, Annual Meeting, special session on Arrangements and Related Topics, New Orleans Sheraton, New Orleans, LA, USA, Jan. 6, 2007
- ⑩ Terao, Hiroaki, Basic properties of multiarrangements, Geometry and analysis on complex varieties, Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS) Kyoto University, Dec. 13, 2006
- ⑪ Terao, Hiroaki, Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem, Colloquium, Okayama University, Nov. 9, 2006
- ⑫ Terao, Hiroaki, Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem, Development of Computational Algebraic Statistics, Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS) Kyoto University, Nov. 8, 2006
- ⑬ Terao, Hiroaki, Multiderivations of Coxeter Arrangements of Type  $B_{\ell}$  and Primitive Derivations, Geometry and Analysis on Complex Algebraic Varieties, Joint RFBR-JSPS Symposium, Moscow Independent University, Aug. 17, 2006
- ⑭ Terao, Hiroaki, Multiderivations of real reflection arrangements, The international symposium on singularity theory and their applications II, Beijing University

of Chemical Technology, China, May 10, 2006

- ⑮ Terao, Hiroaki, Various phases of arrangements of hyperplanes, Colloquium, Hokkaido University, April 28, 2006
- ⑯ Terao, Hiroaki, Multiderivations of Coxeter Arrangements of Type B<sub>n</sub> and Primitive Derivations, Colloquium, Northern Arizona University, Feb. 17, 2006
- ⑰ Terao, Hiroaki, Introduction to hyperplane arrangements - Especially on free arrangements - Recent topics on real and complex singularities, Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS) Kyoto University, Nov. 28, 2005
- ⑱ Terao, Hiroaki, What makes arrangements free? Euroconferences in Mathematics on Crete, Algebraic and Geometric Combinatorics, Anogia, Greece, August 21, 2005

[その他]

ホームページ

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tera o/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

寺尾 宏明 (TERAO HIROAKI)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：90119058

### (2) 研究分担者

Martin Guest (2005-2007)  
首都大学東京・都市教養学部・理工系・教授  
研究者番号：10295470

徳永 浩雄 (TOKUNAGA HIROO) (2005-2007)  
首都大学東京・都市教養学部・理工系・教授  
研究者番号：30211395

中島 徹 (NAKASHIMA TOORU) (2005-2007)  
日本女子大学・理学部・教授  
研究者番号：20244410

中村 憲 (NAKAMURA KEN) (2005-2007)  
首都大学東京・都市教養学部・理工系・教授  
研究者番号：80110849

松野 一夫 (MATSUNO KAZUO) (2005-2007)  
津田塾大学・学芸学部・准教授  
研究者番号：40332936

齋藤 恭司 (SAITO KYOJI) (2005-2007)  
数物連携宇宙研究機構(IPMP)・主任研究員  
研究者番号：20012445

竹村 彰通 (TAKEMURA AKIMICHI) (2005-2007)  
東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授  
研究者番号：10171670

寺杣 友秀 (TERASOMA TOMOHIDE) (2005-2007)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：50192654

### (3) 連携研究者

Martin Guest (2008)  
首都大学東京・都市教養学部・理工系・教授  
研究者番号：10295470

徳永 浩雄 (TOKUNAGA HIROO) (2008)  
首都大学東京・都市教養学部・理工系・教授  
研究者番号：30211395

中島 徹 (NAKASHIMA TOORU) (2008)  
日本女子大学・理学部・教授  
研究者番号：20244410

中村 憲 (NAKAMURA KEN) (2008)  
首都大学東京・都市教養学部・理工系・教授  
研究者番号：80110849

松野 一夫 (MATSUNO KAZUO) (2008)  
津田塾大学・学芸学部・准教授  
研究者番号：40332936

齋藤 恭司 (SAITO KYOJI) (2008)  
数物連携宇宙研究機構(IPMP)・主任研究員  
研究者番号：20012445

竹村 彰通 (TAKEMURA AKIMICHI) (2008)  
東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授  
研究者番号：10171670

寺杣 友秀 (TERASOMA TOMOHIDE) (2005-2007)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：50192654