

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目： 基盤研究 (B)

研究期間：2005 ~ 2008

課題番号：17340029

研究課題名 (和文) 間隙級数が開く乱数論と確率論の新展開

研究課題名 (英文) Development of stochastic numerics and probability theory via lacunary series

研究代表者

福山 克司 (FUKUYAMA KATUSI)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60218956

研究成果の概要：一様分布論にあらわれる discrepancy の漸近挙動の解析に取り組み、その重複対数の法則的な挙動が完全にわかっていなかった発散等比数列やいわゆる Hardy-Littlewood-Pólya の列について完全な形の重複対数が成立することを解明した。また、有界型重複対数の法則に従いながらも完全形の重複対数の法則が成り立たない例の構成などをおこない、一様分布論の測度的研究の進展に寄与した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,200,000	0	3,200,000
2006年度	2,600,000	0	2,600,000
2007年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2008年度	2,500,000	750,000	3,250,000
年度			
総計	10,700,000	1,470,000	12,170,000

研究分野： 確率論

科研費の分科・細目： 数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード： discrepancy、間隙級数、重複対数の法則、中心極限定理、Riesz-Raikov 和、再帰性

1. 研究開始当初の背景

Weyl の定理の主張は $n_{k+1} - n_k > c > 0$ であれば $\{n_k x\}$ は単位区間上一様分布するというものであった。これは discrepancy

$$\sup_{0 \leq a' < a < 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{[a', a)}(\langle n_k x \rangle) - (a - a') \right|;$$

で与えられる discrepancy $D_N(\{n_k x\})$ が 0 に収

束することを導くものである。その収束の速さを決定する問題については膨大な結果があるが完全にその速さが決定されているのは Khinchin と Kesten の結果がある $\{k\}$ のみである。

Philipp は Hadamard 間隙条件 $n_{k+1}/n_k > q > 1$ をみたく $\{n_k\}$ に対し重複対数型の評価

$$\frac{1}{4} < \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{n_k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} \leq C_q \quad \text{a.e.},$$

をしめして、Erdős-Gál の予想を解決している。また R. C. Baker は 1979 年頃に Hardy-Littlewood-Pólya の列に対しても同様の漸近挙動が得られることを予想した。ここで、Hardy-Littlewood-Pólya の列とは互いに素な有限個の自然数 $1 < q_1 < \dots < q_\tau$ により生成される半群

$$\{q_1^{i_1} \dots q_\tau^{i_\tau} \mid i_1, \dots, i_\tau = 0, 1, 2, \dots\}$$

を単調増大になるように並べて得られる数列である。Philipp (1994) は Hardy-Littlewood-Pólya の列に対しても Hadamard 間隙条件の場合と同様に有界重複対数型の評価が成り立つことを証明した。

2. 研究の目的

間隙級数の方法を用いて具体的な数列に対して discrepancy の漸近挙動を完全に決定するのがその目的であった。数学的な興味もともかく、discrepancy の評価は数値積分法の性能評価にもかかわる応用上も重要な問題であるからである。

3. 研究の方法

discrepancy を単位区間内の有限個の点を端点にもつ有限個の区間に限定した最大値により得られる量とそこで用いられた点の間に限定し取った上限の二つの量に分解して評価する discrepancy splitting の手法を開発し応用することを主眼とする。

4. 研究成果

(1) 等比数列の discrepancy の重複対数の法則 $\theta > 1$ とすると

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{\theta^k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} = \sup_{0 \leq a < 1} \sigma_{\theta, 0, a}, \quad \text{a.e. } x.$$

が成り立ち、定数は以下のように決定される。

$\theta^r \notin \mathbf{Q}$ ($r \in \mathbf{N}$) なら、

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{\theta^k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} = \frac{1}{2}, \quad \text{a.e. } x$$

$\theta = \sqrt[r]{p/q}$ ($p, q \in \mathbf{N}$, $r = \min\{k \in \mathbf{N} \mid \theta^k \in \mathbf{Q}\}$, $\gcd(p, q) = 1$) なら

$$\frac{1}{2} \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{\theta^k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{pq+1}{pq-1}}, \quad \text{a.e. } x$$

さらに p, q がともに奇数なら

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{\theta^k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{pq+1}{pq-1}}, \quad \text{a.e. } x$$

特に p が奇数で $q = 1$ の時は

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{\theta^k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p+1}{p-1}}, \quad \text{a.e. } x$$

また $p \geq 4$ が偶数で $q = 1$ の時には

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{\theta^k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} = \frac{\sqrt{(p+1)!/(p-3)!}}{2(p-1)^2}, \quad \text{a.e. } x$$

$p = 2, q = 1$ なら

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{\theta^k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} = \frac{\sqrt{42}}{9}, \quad \text{a.e. } x$$

(2) Hardy-Littlewood-Pólya の列の discrepancy の重複対数の法則。

Hardy-Littlewood-Pólya の列に対して定数 C_{q_1, \dots, q_τ} が存在して

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N(\{n_k x\})}{\sqrt{2N \log \log N}} = C_{q_1, \dots, q_\tau}, \quad \text{a.e. } x.$$

が成り立つ。ここで、 $\{n_k\}$ が奇数のみから成る時には

$$C_{q_1, \dots, q_\tau} = \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{\tau} \frac{q_i + 1}{q_i - 1} \right)^{1/2}$$

である。また偶数を含む時にも q_1 が偶数であるとする、評価

$$\frac{1}{2} \left(\prod_{i=2}^{\tau} \frac{q_i + 1}{q_i - 1} \right)^{1/2} \leq C_{q_1, \dots, q_\tau} \leq \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{\tau} \frac{q_i + 1}{q_i - 1} \right)^{1/2}.$$

が成り立つ。

(3) 非有界数列の並べ替えの問題。

任意の有界でない正の実数列 $\{n_k\}$ に対して \mathbf{N} 上の全単射 σ が存在して

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N\{n_{\sigma(k)} x\}}{\sqrt{2N \log \log N}} = \frac{1}{2} \quad \text{a.e.}$$

が成り立つ。すなわち、任意の非有界正数列 $\{n_k x\}$ が与えられると、上手に並べ変えれば一様分布独立確率変数列の discrepancy の挙動を模倣できるということである。

(4) 有界型重複対数に従うが上極限が定数ではない列の存在。

$n_{k+1} - n_k \leq 5$ を満たす単調増大数列が存在し

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{ND_N\{n_k x\}}{\sqrt{2N \log \log N}} = \sigma(x) \quad \text{a.e. } x$$

をみたす。ここで $\sigma(x)$ は以下で与えられる非定数関数である。

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= (4x \mathbf{1}_{[0, 1/4)}(x) + \mathbf{1}_{[1/4, 3/4)}(x) \\ &\quad + 4(1-x) \mathbf{1}_{[3/4, 1)}(x)) / 9 + 1/24. \end{aligned}$$

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 25 件)

- (1) K. Fukuyama, *The law of the iterated logarithm for the discrepancies of a permutation of $\{n_k x\}$* , Acta Mathematica Hungarica, to appear 査読あり
- (2) K. Fukuyama & K. Nakata, *A metric discrepancy result for the Hardy-Littlewood-Pólya sequences*, Monatshefte für Mathematik, to appear 査読あり
- (3) K. Fukuyama, *A law of the iterated logarithm for discrepancies: non-constant limsup* Monatshefte für Mathematik, to appear 査読あり
- (4) K. Fukuyama & Y. Komatsu, *A law of large numbers for arithmetic functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, **137** (2009) 349–352. 査読あり
- (5) K. Fukuyama & S. Takahashi, *On limit distribution of trigonometric sums*, Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliquées, **53** (2008) 19–24 査読あり
- (6) K. Fukuyama & Y. Ueno, *On the central limit theorem and the law of the iterated logarithm*, Statistics & Probability Letters, **78** (2008) 1384–1387
- (7) K. Fukuyama & Y. Takeuchi, *The law of the iterated logarithm for subsequences: a simple proof*, Lobachevskii Jour. Math., **29** (2008) 130–132. 査読あり
- (8) K. Fukuyama, *The law of the iterated logarithm for discrepancies of $\{\theta^n x\}$* , Acta Mathematica Hungarica, **118** 155–170, 2008
- (9) K. Fukuyama & R. Kondo, *On recurrence property of Riesz-Raikov sums*, Lobachevskii Jour. Math., **26** (2007) 27–31. 査読あり
- (10) K. Fukuyama, *On lacunary trigonometric product*, Probability and Number Theory — Kanazawa 2005, Advanced Studies in Pure Mathematics, **49** (2007) 79–90. 査読あり
- (11) V. Belitsky, Y. Higuchi, N. Konno, N. Sugimine, *Analyticity of survival probability for contact process around $t = 0$* , Analysis and its Applications **5** (2007) 67–76. 査読あり
- (12) H. Sugita & S. Takanobu, *The probability of two \mathbb{F}_q -polynomials to be coprime*, Probability and number theory—Kanazawa 2005, Adv. Stud. Pure Math., **49** (2007) 455–478 査読あり
- (13) S. Ogawa, *Noncausal stochastic calculus revisited—around the so-called Ogawa integral*. Advances in deterministic and stochastic analysis, 297–320, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2007). 査読あり
- (14) S. Ogawa, K. Wakayama, *On a real-time scheme for the estimation of volatility*. Monte Carlo Methods Appl. **13** (2007) no. 2, 99–116. 査読あり
- (15) S. Ogawa, M. Pontier *Pricing rules under asymmetric information*, ESAIM Probab. Stat. **11** (2007) 80–88 査読あり
- (16) K. Fukuyama, *Gap series and functions of bounded variation*, Acta Mathematica Hungarica, **110** (2006) 175–191. 査読あり
- (17) H. Sugita, *Numerical integration for complicated functions and random sampling*, Sugaku Expositions **19** (2006) 153–169 査読あり
- (18) Y. Hamana, *On the range of pinned random walks*, Tohoku Math. J. (2) **58** (2006) no. 3, 329–357. 査読あり
- (19) Y. Hamana, *A remark on the range of three dimensional pinned random walks*, Kumamoto J. Math. **19**(2006) 83–97. 査読あり
- (20) S. Ogawa, K. Wakayama, *On a real-time scheme for the estimation of volatility*, Mem. Inst. Sci. Engrg. Ritsumeikan Univ. **65** (2006) 29–39. 査読あり

- (21) J. Akahori, K. Yasutomi, T. Yokota, *Backwardation in Asian option prices*, International Journal of Innovative Computing, Informations and Control, **1** (2005) 581–593. 査読あり
- (22) Y. Hishida K. Yasutomi, *On asymptotic behavior of the prices of Asian options*, Asia-Pacific Financial Markets, **12** (2005) 289–306. 査読あり
- (23) Y. Hamana, *Limit theorems for the Wiener sausage*, Sugaku Expositions **18** (2005) no. 1, 53–73. 査読あり
- (24) S. Ogawa, *Introduction to the discrete approximation of stochastic differential equations*, Sugaku Expositions **18** (2005) no. 1, 101–122. 査読あり
- (25) S. Kanagawa, S. Ogawa *Numerical solutions of stochastic differential equations and their applications*, Sugaku Expositions **18** (2005) no. 1, 75–99. 査読あり
- [学会発表] (計 17 件)
- (1) 福山克司、中田 啓介: Hardy-Littlewood-Pólya の列の discrepancy が従う重複対数の法則について統計数学科会, 日本数学会 2009 年 年会 東京大学 2009 年 3 月 26 日 一般講演
- (2) K. Fukuyama: On the law of the iterated logarithm for $\{n_k x\}$: non-constant limsup, Random matrices, special functions and related topics 京都大学数理解析研究所 Nov 14-15 2008, 招待講演
- (3) 福山克司: 数列 $\{n_k x\}$ の並べ変えの discrepancy の漸近挙動について統計数学科会, 日本数学会 2008 年 秋季総合分科会 東京工業大学 2008 年 9 月 24 日 一般講演
- (4) 福山克司、小松 豊: 正の加法的函数を重みとした可積分同分布独立確率変数列の大数の法則について, 統計数学科会, 日本数学会 2008 年 年会 近畿大学 2008 年 3 月 24 日 一般講演
- (5) K. Fukuyama: On the law of the iterated logarithm for discrepancies of $\{\theta^n x\}$, Workshop on number theory and probability, 京都大学数理解析研究所および国際高等研究所, Oct 15-16 2007, 招待講演
- (6) 福山克司: 大きい間隙を持つ数列 $\{n_k x\}$ の discrepancy の従う重複対数の法則, 統計数学科会, 日本数学会 2007 年 秋季総合分科会 東北大学 2007 年 9 月 21 日 一般講演
- (7) K. Fukuyama: On the law of the iterated logarithm for discrepancies of $\{\theta^n x\}$, Rencontres Mathématiques en Rouen 2007, Université de Rouen, France, June 11-14 2007, 招待講演
- (8) 福山克司: 数列 $\{\theta^n x\}$ の Discrepancy が従う重複対数の法則について, 統計数学科会, 日本数学会 2007 年 年会 埼玉大学 2007 年 3 月 27 日 一般講演
- (9) 杉峰伸明、V. Belitsky, 樋口保成, 今野紀雄, Analyticity of survival probability for contact process around $t = 0$, 統計数学科会, 日本数学会 2007 年 年会 埼玉大学 2007 年 3 月 27 日 一般講演
- (10) 福山克司: 数列 $\{\theta^n x\}$ の Discrepancy が従う重複対数の法則について, 東京確率論セミナー, 東京工業大学 2007 年 2 月 5 日 一般講演
- (11) 福山克司: 弱い連続率の下での間隙級数の重複対数の法則について II, 統計数学科会, 日本数学会 2006 年 秋季総合分科会 大阪市立大学 2006 年 9 月 19 日 一般講演
- (12) 杉田洋、高信敏: ランダムな digamma 関数に関する極限定理統計数学科会, 日本数学会 2006 年 秋季総合分科会 大阪市立大学 2006 年 9 月 19 日 一般講演
- (13) K. Fukuyama: On asymptotic properties of gap series, 8 June 2006, Workshop On Probability With Applications, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, June 5-9 2006, 招待講演

- (14) 福山克司、近藤良太：間隙級数の再帰性について、日本数学会 2006 年 年会 中央大学 2006 年 3 月 27 日 一般講演
- (15) 福山克司：弱い連続率の下での間隙級数の重複対数の法則について、統計数学科会、日本数学会 2005 年 秋季総合分科会 岡山大学、2005 年 9 月 19 日、一般講演
- (16) K. Fukuyama: On the law of the iterated logarithm for gap series , Department of Mathematics, Hokkaido Univ., Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, Organizers: A.Miyachi (Tokyo Woman's Christian Univ.), K.Tachizawa (Hokkaido Univ.) August 22, 2005, 10:45 ~ 11:45, 招待講演
- (17) K. Fukuyama: *On the law of the iterated logarithm for gap series*. International Conference on Probability and Number Theory 2005 (P&NT05, June 20 - June 24 , 2005), Kanazawa, Japan, June 23, 2005 招待講演

[図書] (計 3 件)

- (1) Probability and number theory—Kanazawa 2005. Proceedings of the International Conference held in Kanazawa, June 20–24, 2005. Edited by Shigeki Akiyama, Kohji Matsumoto, Leo Murata and Hiroshi Sugita. Advanced Studies in Pure Mathematics, 49. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2007. xviii+558 pp. ISBN: 978-4-931469-43-3
- (2) 西尾真喜子・樋口保成, 確率過程入門, 培風館, 2006, 239pp.
- (3) 黒田耕嗣・樋口保成, 統計力学 相転移の数理, 培風館, 2006, 224pp.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福山 克司 (FUKUYAMA KATUJI)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60218956

(2) 研究分担者

樋口 保成 (HIGUCHI YASUNARI)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60112075

山崎 正 (YAMAZAKI TADASHI)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 30011696

(3) 連携研究者

杉田 洋 (SUGITA HIROSHI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50192125

小川 重義 (OGAWA SHIGEYOSHI)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号: 80101137

濱名 裕治 (HAMANA YUJI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 00243923

安富 健児 (YASUTOMI KENJI)
立命館大学・理工学部・専任講師
研究者番号: 20388127