

平成 21 年 5 月 28 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2005 ～ 2008

課題番号：17340037

研究課題名 (和文) アフィン商写像と不変微分作用素環

研究課題名 (英文) Affine quotient maps and invariant differential operators

研究代表者

西山 享 (NISHIYAMA KYO)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 70183085

研究成果の概要：図形や空間の対称性は群の作用によって記述される。この研究では空間の対称性が二つの群の可換な作用で記述されている時に、二つの作用に対応する二種類の不変量(距離やエネルギー、角度などに相当する幾何学的不変量)がどのように関係するのかを、不変式論や表現論を用いて研究した。空間の対称性が良い場合に、群軌道、空間上の関数空間や群の作用で不変な微分作用素たちの間に対応がある(テータ対応・カペリ恒等式)ことを明らかにしたのが主要な結果である。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	2,700,000	0	2,700,000
2006 年度	3,100,000	0	3,100,000
2007 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2008 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
年度			
総計	11,000,000	1,560,000	12,560,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：アフィン商多様体・不変式論・ユニタリ表現・冪零軌道

1. 研究開始当初の背景

空間に二つの異なる対称性(群の作用)があるときに、関数空間(群の表現)の間にテータ対応と呼ばれる対応があることは 1970 年代から知られている。この機構は簡約群のユニタリ表現論で大きな役割を果たしてきた。

この研究は、そのような異なる対称性の間の不変量の対応を、アフィン商写像や不変微分作用素などを使って明らかにするために始められた。

群の表現は古典的な不変式論を精密にしたものと見ることもでき、不変微分作用素はその量子化に当たる。したがって当研究

は、Weyl などによって創始された古典的な不変式論の一般化とみなすこともできる。

2. 研究の目的

ある空間(ベクトル空間や代数多様体)に二つの簡約代数群が可換に作用している時に、その不変量や表現の間の対応を明らかにすることが研究の目的である。

幾何学的には二つの群の軌道の間に対応をつけること、より代数的には二つの商空間上の関数(あるいは接続層)の間の対応関係を明らかにすることが具体的な目的である。また、関数の量子化として、不変微分作用

素の間の対応も視野に入れている。

3. 研究の方法

(1) 群作用が与えられていれば、不変式論による商写像を用いて商空間を構成できる。そこで二つの群の作用に関する商空間を考察し、それぞれの商空間における群軌道の対応を調べる。

(2) テータ対応の枠組みを用いて表現の随伴多様体を計算し、随伴多様体の対応や、その重複度に関する公式を求める。

(3) 空間自身は作用している群よりも大きな対称性を持っていることがあるが、そのような大きな対称性(半単純対称空間の理論)を利用して、不変微分作用素の間の行列式型の恒等式を求める。

(4) 問題としている空間をもっと大きな、しかし理解しやすい空間の像と考え、そのような空間の対称性や幾何を研究する。たとえば旗多様体とモーメント写像がそのような空間の候補である。

4. 研究成果

(1) 二つの群の可換な作用が線形な作用(すなわち表現)である場合に、軌道の対応が存在するための十分条件を研究し、多数の例を構成した。この中にはテータ対応では得られないような例もあり、興味深い。軌道の対応が存在するための一般的な条件がこの研究により得られているが、現在までのところ古典群に対してしか例がなく、例外型のときに同様の例を見つけることは面白い問題である。

(2) テータ対応の場合に表現の随伴多様体とその重複度に関する幾何的な対応関係を明らかにした。

随伴多様体とその重複度を合わせたものは随伴サイクルと呼ばれており、我々の結果は、ユニタリ最高ウェイト表現の随伴サイクルのテータ持ち上げを軌道の対応を用いて記述するものである。

(3) 半単純対称空間の理論を用いて不変微分作用素の間の行列式型の恒等式(Capelli 恒等式)が成立することを示した。

この種の恒等式は古典的によく知られているが、我々の得た恒等式は対称空間ならではの新しい側面を有している。また得られた恒等式は一つではなく、エルミート対称対に付随するデュアル・ペアに対応して3種類得られている。

(4) 軌道の対応がある場合に、冪零軌道の閉包の特異点解消とアフィン商写像の関係を明らかにした。そのような特異点解消は旗多様体上の球部分群の軌道の余法束として得られるが、これによって余法束同士の対応が得られることになる。

簡約群のユニタリ表現は旗多様体上の軌道とその上の局所系で分類できることが知られており、この結果はテータ対応の幾何学的側面を記述しているということが出来る。

(5) 旗多様体上の軌道と、軌道の余法束のモーメント写像による像である冪零軌道の対応を詳しく研究し、その分類理論や閉包関係について新しい考え方を提案することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

(1) Kyo Nishiyama and Akihito Wachi, A note on the Capelli identities for symmetric pairs of Hermitian type. in Proceedings of "Infinite Dimensional Harmonic Analysis IV" edited by Joachim Hilgert et al., pp.~223 -- 254, World Scientific, 2009. (査読有)

(2) Ohta, Takuya An inclusion between sets of orbits and surjectivity of the restriction map of rings of invariants. Hokkaido Math. J. 37 (2008), no. 3, 437--454. (査読有)

(3) Lee, Soo Teck; Nishiyama, Kyo; Wachi, Akihito Intersection of harmonics and Capelli identities for symmetric pairs. J. Math. Soc. Japan 60 (2008), no. 4, 955--982. (査読有)

(4) Kato, Shin-ichi; Takano, Keiji Subrepresentation theorem for \mathbb{F}_q -adic symmetric spaces. Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. 11, Art. ID rnn028, 40 pp. (査読有)

(5) Kobayashi, Toshiyuki Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs. Representation theory and automorphic forms, 45-109, Progr. Math., 255, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2008. (査読有)

(6) 菊地 克彦, 「階数 3 の multiplicity-free 作用に関する不変式と不変微分作用素」, 数理解析研究所講究録別冊 B7, 101--120,

(2008). (査読有)

(7) Matsuki, Toshihiko Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds. III. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 10, 4773--4786. (査読有)

(8) Kobayashi, Toshiyuki Visible actions on symmetric spaces. Transform. Groups 12 (2007), no. 4, 671--694. (査読有)

(9) Nishiyama, Kyo; Ochiai, Hiroyuki; Zhu, Chen-Bo Theta lifting of nilpotent orbits for symmetric pairs. Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 6, 2713--2734. (査読有)

(10) Wachi, Akihito Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras. Lett. Math. Phys. 77 (2006), no. 2, 155--168. (査読有)

(11) Matsuki, Toshihiko Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds. II. Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), no. 12, 3423--3428. (査読有)

(12) Matsuki, Toshihiko Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 5, 2217--2245. (査読有)

(13) Nishiyama, Kyo A note on affine quotients and equivariant double fibrations. Infinite dimensional harmonic analysis III, 197--212, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005. (査読有)

(14) Ohta, Takuya Nilpotent orbits of Z_4 -graded Lie algebra and geometry of moment maps associated to the dual pair $(U(p, q), U(r, s))$. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41(2005), no. 3, 723--756. (査読有)

(15) Gindikin, Simon; Matsuki, Toshihiko A remark on Schubert cells and the duality of orbits on flat manifolds. J. Math. Soc. Japan 57 (2005), no. 1, 157--165. (査読有)

(16) Yamashita, Hiroshi Isotropy representation for Harish-Chandra modules. Infinite dimensional harmonic analysis III, 325--351, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005. (査読有)

(17) Kobayashi, Toshiyuki Multiplicity-free representations and visible actions on complex

manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41 (2005), no. 3, 497--549. (査読有)

[学会発表] (計 34 件)

(1) 落合啓之・西山享, 旗多様体の直積上の軌道の有限性について I, II, 2009 日本数学会年会, 2009/3/28, 東京大学駒場.

(2) Akihito Wachi, The number of nilpotent orbits for symmetric pairs. The 8th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory, 2009 年 3 月, 滋賀県大津市.

(3) Jiro Sekiguchi, Saito free divisors and integrable connections, 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題, 2009 年 2 月 3 日-6 日, 京都大学数理解析研究所.

(4) Jiro Sekiguchi, Unitary reflection groups and uniformization differential equations, 「微分方程式と対称空間」大島利雄先生還暦記念研究集会, 2009 年 1 月 13 日-16 日, 東京大学.

(5) Toshihiko Matsuki, Analysis and geometry on homogeneous spaces, 微分方程式と対称空間・大島利雄先生還暦記念研究集会, 2009/1/14, 東京大学大学院数理科学研究科.

(6) 西山享, 半単純軌道の漸近錐と退化主系列表現, RIMS 研究集会「表現論と非可換調和解析における新しい視点」, 2008 年 9 月 16 日 (火), 数理解析研究所 420 号室.

(7) 菊地 克彦, 反橋 拓朗, 「 $Sp(n)$ の可約な multiplicity-free 作用に関する不変式と不変微分作用素」, 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 24 日-27 日, 東京工業大学.

(8) Kyo Nishiyama, Symmetric pair and orbits on the flag variety 1-6, Summer School on Lie Theory, 2008/08/11-19, R204, NCTS (National Center for Theoretical Science), NCKU (National Cheng-Kung University).

(9) Kyo Nishiyama, Asymptotic cone of semisimple orbit for symmetric pairs, Functional Analysis X --Representation Theory--, 2008/07/01, IUC, Dubrovnik, Croatia.

(10) Toshihiko Matsuki, Duality of orbits on flag manifolds and Stein extensions of symmetric spaces, 日露ワークショップ Harmonic analysis on homogeneous spaces and quantization, 2008/2/19, Russia.

(11) Kyo Nishiyama, Introduction to the

geometry of Kc-orbits on the flag varieties and nilpotent orbits I, II, NCTS Winter Workshop on Representation Theory. 2008/01/26-28, NCTS, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan.

(12) Hiroshi Yamashita, Geometric invariants associated with the discrete series representations, NCTS 2008 Winter Workshop on Representation Theory, 26, 29 January 2008, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan.

(13) 落合啓之, あるベキ零的群作用に対する不変式環, 2007 年度表現論ワークショップ, 2007.12.25--27, 名古屋大学.

(14) Kyo Nishiyama, Resolution of null fibers and closed orbits on partial flag varieties, "B-stable ideals and nilpotent orbits", 2007/10/09, INDAM, University of Rome 1, Italy.

(15) Kyo Nishiyama, Representations of reductive groups and invariant theory/ Affine quotients and the Correspondence of orbits. International conference on Recent Advances in Mathematics and its applications. 2007/09/27-29, Dept of Math, KU Post Graduate Center, Belgaum, Karnataka INDIA.

(16) Hiroshi Yamashita, Isotropy representations and Howe duality correspondence, Conference on Infinite- Dimensional Harmonic Analysis, 10 September 2007, University of Tokyo.

(17) Toshihiko Matsuki, Generalized Schubert cells and the complex crown, 玉原ワークショップ 2007 Geometry and representations in Lie theory, 2007/8/21, 東京大学玉原セミナーハウス.

(18) J. Sekiguchi, Saito free divisors arising from some of 14 exceptional families of Arnol'd, International conference Analysis and Geometry on Complex Varieties, August 15-20, 2007, Krasnoyarsk, Russia.

(19) Kyo Nishiyama, Hiroshi Yamashita; Nilpotent Orbits and Associated Cycles for Unitary Highest Weight Representations 1-8, 2007 Nankai Summer School on Representation Theory and Harmonic Analysis. 2007/06/14-23, 中国 南開大学 Chern Institute of Mathematics.

(20) 落合啓之, ある離散系列表現の特性多様体について, 北部研究集会「リー群とリー代数の表現論」, 2007.3.6--9, 北海道大学.

(21) 関口次郎, ベキ零軌道の魅力, 第 38 回

Encounter with Mathematics "幾何学と表現論", 2006 年 12 月, 中央大学.

(22) 落合啓之, ベキ零軌道の関口対応, Encounter with Mathematics 38 「幾何学と表現論 --- Kostant-関口対応をめぐって」, 2006.12.8--9, 中央大学.

(23) Kyo Nishiyama, Resolution of the null fiber and conormal bundles of closed orbits on a flag variety. Representation Theory and Prehomogeneous Vector Spaces, 2006/09/13, IRMA, Strasbourg, France.

(24) Akihito Wachi. Capelli identities for symmetric pairs. Representation Theory and Prehomogeneous Vector Spaces, 2006 年 9 月, IRMA, Strasbourg.

(25) Jiro Sekiguchi, Lie algebras of logarithmic free divisors and curves with simple singularities, Workshop "Representations of Quivers, Singularities and Lie Theory", 2006 年 9 月, Morningside Center of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, China.

(26) 菊地 克彦, 階数 3 の multiplicity-free 空間上の不変式と不変微分作用素, 日本数学会秋季総合分科会, 2006 年 9 月 19 日-22 日, 大阪市立大学.

(27) Jiro Sekiguchi, Weighted homogeneous Saito singularities in three dimensional space, Joint RFBR-JSPS Symposium "Geometry and Analysis on Complex Algebraic Varieties", 2006 年 8 月, Moscow Independent University, Russia.

(28) 松木敏彦, 旗多様体上の軌道対応とリーマン対称空間のスタイン拡張, 第 53 回幾何学シンポジウム, 2006/8/6, 金沢大学.

(29) 菊地 克彦, 「低階数の multiplicity-free 作用に関する不変式」, 2005 年度表現論ワークショップ, 2006 年 3 月 29 日--31 日, 横浜国立大学.

(30) Hiroyuki Ochiai, A conormal bundle on flag varieties -- construction of invariants, Topics in the Geometry of Flag Varieties and Representation Theory, 2006.3.21--23, 京都大学.

(31) Akihito Wachi. Capelli identities for symmetric pairs. SNU-HU 3rd Joint Symposium on Mathematics, 2005 年 10 月, ソウル大学.

(32) 落合啓之, 表現の次数と shifted Schur,

RIMS 共同研究「Capelli 恒等式の新局面」,
2005.9.5-9, 京都大学数理解析研究所.

(33) 落合啓之, 旗多様体上の余法束の概均質性
と不変式, "Integral transformations on
homogeneous spaces", 2005.8.24, 玉原国際セ
ミナーハウス.

(34) 松木敏彦, 旗多様体上の軌道対応に關する
領域の同一性 II の補足, 数理解析研究所研
究集会, 2005/7/25, 数理解析研究所.

[その他]

山下 博 述, 阿部 紀行 記: 簡約リ一
群の表現と冪零軌道 (Representations
and nilpotent orbits of reductive Lie groups.
Communicated by T. Oshima), Lecture
Notes in Mathematical Sciences vol.3, 東
京大学数理科学研究科.

6. 研究組織

(1)研究代表者

西山 享 (NISHIYAMA KYO)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 70183085

(2)研究分担者

加藤 信一 (KATO SHINICHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90114438

松木 敏彦 (MATSUKI TOSHIHIKO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 20157283

菊地 克彦 (KIKUCHI KATSUHIKO)
京都大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号: 50283586

(3)連携研究者

太田 琢也 (Ohta Takuya)
東京電機大学・工学部・教授
研究者番号: 30211791

落合 啓之 (Ochiai Hiroyuki)
名古屋大学・大学院多元数理研究科・教授
研究者番号: 90214163

小林 俊行 (Kobayashi Toshiyuki)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号: 80201490

関口 次郎 (Sekiguchi Jiro)
東京農工大学・大学院共生科学技術研究院・

教授
研究者番号: 30117717

山下 博 (Yamashita Hiroshi)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 30192793

和地 輝仁 (Wachi Akihito)
北海道工業大学・創生工学部・准教授
研究者番号: 30337018

(4) 研究協力者

スーテック リー (Soo Teck Lee)
シンガポール国立大学・理学部・准教授

ピーター トラパ (Peter Trapa)
ユタ大学・数学教室・准教授