

平成 21 年 5 月 26 日現在

研究種目：基盤研究 (B)  
 研究期間：2005～2008  
 課題番号：17340038  
 研究課題名 (和文)：数理論理学における代数解析的方法 (表現論・組み合わせ論・複素解析を中心として)  
 研究課題名 (英文) Method of Algebraic Analysis in Mathematical Physics (with the emphasis on Representation Theory, Combinatorics and Complex Analysis).  
 研究代表者：三輪 哲二 (MIWA TETSUJI)  
 京都大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号：10027386

## 研究成果の概要：

数学を形作る第一の要素は数であり、その次ぎにくるのは関数である。関数は数に数を対応させるものである。もう一段上になって、関数に関数を対応させるものを作用素という。作用素は2つのものから第3のものを、順に続けることによって作り出すことができるが、順番を変えると結果が異なる。これを作用素の非可換性という。非可換な作用素がどのような等式によって統制されるかを研究するのが代数解析である。本研究では、磁石のような物理系を数学の言葉で作用素を用いてとらえ、その非可換性を研究することによって温度変化する磁化の強さのような関数を決定し、物理系を特徴づける数にまで迫ろうというものである。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	2,400,000	0	2,400,000
2006 年度	1,900,000	0	1,900,000
2007 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2008 年度	1,900,000	570,000	2,470,000
年度			
総計	8,100,000	1,140,000	9,240,000

研究分野数学：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：表現論、組み合わせ論、可解模型

## 1. 研究開始当初の背景

数理論理学の可解模型に対する代数解析からのアプローチは、我が国において、1970年代のSato-Miwa-JimboによるIsing模型とモノドロミー保存変形理論、1980年代のSato-Satoによる無限次元グラスマン多様体の理論、Date-Kashiwara-Jimbo-Miwaによる頂点作用素によるソリトン解の構成等の著しい業績が続いた。これらは、Baxter や

Faddeev による Yang-Baxter 方程式を用いての可解模型へのアプローチ、Belavin-Polyakov-Zamolodchikov による共形場理論、Drinfeld と Jimbo によって発見された量子群の理論等とともに、数理論理学の中心的話題となった。1990年代になっての大きな進展のひとつは、量子群の理論と頂点作用素の理論を融合する形で、共形場理論の KZ 方程式の理論が差分化されたことである。これは、可解な場の理論では Smirnov による形状因子

の理論として、可解格子模型では Jimbo-Nakayashiki-Miki-Miwa による相関関数の理論として結実した。また、量子群の表現を  $q=0$  の極限で考えることから、柏原によって結晶基底の考えが導入され、組み合わせ論と表現論の新たな出会いの場となった。

## 2. 研究の目的

2005年から始まる本研究課題は、上に述べたような研究の流れをさらに深化させることを目的としている。組み合わせ論と表現論の関連においては、Virasoro 代数やアフィンリー代数の可積分表現の基底を、主要場の Fourier 成分を利用して構成する問題を取り上げた。その中から、無限次元表現の指標に対するボゾニック公式とフェルミオンニック公式について、種々の形の再帰的關係式を表現論的に求めるという目標が浮かび上がってきた。格子模型においては、XXZ 模型の相関関数を代数的に表示する方法についての研究を目指した。こちらは、複素解析の方法を鍵として代数解析と結びついている。Baxter の Q 作用素とそれの満たす差分方程式を、古典解析の超楕円曲線のアーベル微分の理論の量子化として捉えることができる。数理論理の問題の中から古典解析につながる問題を拾い出すことが研究の大きな目的である。

## 3. 研究の方法

Virasoro 代数の既約表現空間において、表現の単項基底をカレントの成分をではなく、異なる既約表現の間をつなぐ、主要場の成分を用いて構成するというのがわれわれの方法である。また、種々の再帰的關係式を用いて指標公式を捉えるということも強力な方法である。特に、アフィンリー代数の指標を量子群の Whittaker ベクトルと関係づけることによって、準古典極限で予想される関係式が有限のパラメタで成り立っていることを示すことができる。XXZ 模型においては、モノドロミー行列の補助空間として、 $q$  振動し代数を考えるという Bazhanov-Lukyanov-Zamolodchikov の方法を発展させて、複素解析的な手法と結びつけることによって、フェルミオンの関係式を満たす生成消滅作用素を構成しそれを用いて密度行列を代数的に表現する。

## 4. 研究成果

Virasoro 代数の(1,3)型の主要場のフーリエ成分による単項基底は、単項式の隣り合う作用素のフーリエ成分の差の値が、作用する空間の3つ組から決まるある有理数以上とい

うフェルミ的条件で特徴付けられる。アフィン  $sl_3$  リー代数のベキ零部分代数の表現の指標を、極点ウエイトからの寄与の和に書いたボゾニック公式が再帰的關係式を満たすことを示した。XXZ 模型の密度行列を、ツイストした遷移行列の最大固有値について指数公式の形に表示した。 $q$  振動し代数を使って Q 作用素を構成する方法を修正して準局所場に随伴作用するモノドロミー行列の非対角要素から、グラスマン関係式を満たす消滅作用素を構成すると、指数はそれの2次式の形に書ける。さらに、原始差分を考えると生成作用素を構成することも出来る。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

(1) Boos, H.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Smirnov, F.; Takeyama, Y. “Hidden Grassmann structure in the XXZ model. II. Creation operators” Comm. Math. Phys. 286 (2009), no. 3, 875--932. 査読有.

(2) Kashiwara, Masaki; Nakashima, Toshiki; Okado, Masato; Affine geometric crystals and limit of perfect crystals. Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 7, 3645--3686. 査読有.

(3) Feigin, B.; Feigin, E.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Takeyama, Y., “A  $\phi$ -filtration of the Virasoro minimal series  $M(p, p')$  with  $1 < p' < 2$ ” Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44 (2008), no. 2, 213--257. 査読有.

(4) Okado, Masato; Schilling, Anne Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types. Represent. Theory 12 (2008), 186--207. 査読有.

(5) Iohara, Kenji; Modules de plus haut poids unitarisables sur la super-algèbre de Virasoro  $N=2$  tordue. (French) [Unitarizable highest-weight modules on the twisted  $N=2$  super Virasoro algebra] Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008), no. 3, 733--754. 査読有.

(6) Cho, Koji; Nakayashiki, Atsushi; Differential structure of abelian functions. Internat. J. Math. 19 (2008), no. 2, 145--171. 査読有.

(7) Feigin, B.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Mukhin, E.; Takeyama, Y. “Sets of rigged paths with Virasoro characters” Ramanujan J. 15 (2008), no. 1, 123--145. 査読有.

(8) Watanabe, K.; Kametaka, Y.; Nagai, A.; Takemura, K.; Yamagishi, H. The best constant of Sobolev inequality on a bounded interval. J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 699--706. 査読有.

(9) Jimbo, M.; Nagoya, H.; Sun, J. Remarks on the confluent KZ equation for  $q$ -series and quantum Painlevé equations. J. Phys. A 41 (2008), no. 17, 175205, 14 pp. 査読有.

(10) Kuroki, Kazunori; Nakayashiki, Atsushi; Free field approach to solutions of the quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 4 (2008), Paper 049, 13 pp. 査読有.

(11) Okado, Masato; Existence of crystal bases for Kirillov-Reshetikhin modules of type  $D$ . Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43 (2007), no. 4, 977--1004. 査読有.

(12) Boos, H.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Smirnov, F.; Takeyama, Y. “Hidden Grassmann structure in the XXZ model” Comm. Math. Phys. 272 (2007), no. 1, 263--281. 査読有.

(13) Kashiwara, M.; Misra, K. C.; Okado, M.; Yamada, D.; Perfect crystals for  $q$ -series  $q(D_3)$ . J. Algebra 317 (2007), no. 1, 392--423. 査読有

(14) Kasatani, M.; Miwa, T.; Sergeev, A. N.; Veselov, A. P. “Coincident root loci and Jack and Macdonald polynomials for special values of the parameters. Jack, Hall-Littlewood and Macdonald polynomials” 207--225, Contemp. Math., 417, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006. 査読有.

(15) Boos, H.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Smirnov, F.; Takeyama, Y. “Algebraic representation of correlation functions in integrable spin chains” Ann. Henri Poincaré 7 (2006), no. 7-8, 1395--1428. 査読有.

(16) Suzuki, Takeshi; Double affine Hecke

algebras, conformal coinvariants and Kostka polynomials. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 343 (2006), no. 6, 383--386. 査読有.

(17) Boos, H.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Smirnov, F.; Takeyama, Y. “Density matrix of a finite sub-chain of the Heisenberg anti-ferromagnet” Lett. Math. Phys. 75 (2006), no. 3, 201--208. 査読有.

(18) Boos, H.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Smirnov, F.; Takeyama, Y. “Reduced  $q$ KZ equation and correlation functions of the XXZ model” Comm. Math. Phys. 261 (2006), no. 1, 245--276. 査読有.

(19) Boos, H.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Smirnov, F.; Takeyama, Y. “Traces on the Sklyanin algebra and correlation functions of the eight-vertex model” J. Phys. A 38 (2005), no. 35, 7629--7659. 査読有.

(20) Feigin, B.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Mukhin, E.; Takeyama, Y.; “A monomial basis for the Virasoro minimal series  $M(p, p')$ : the case  $1 < p' / p < 2$ ” Comm. Math. Phys. 257 (2005), no. 2, 395--423. 査読有.

(21) Suzuki, Takeshi; Rational and trigonometric degeneration of the double affine Hecke algebra of type  $A$ . Int. Math. Res. Not. 2005, no. 37, 2249--2262. 査読有.

[学会発表] (計 2 件)

(1) Galileo Galilei Institute Workshop, Low-dimensional Quantum Field Theories and Applications, Fermion Structure in XXZ model, September, 2008

(2) Mathematical Physics: from 20 to 21 centuries, In Honor of the 75<sup>th</sup> Birthday of Ludwig Faddeev, Correlation functions of the XXZ model, March, 2009

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

三輪 哲二 (MIWA TETSUJI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 10027386

### (2) 研究分担者

神保 道夫 (JIMBO MICHIO)  
立教大学・理学部・教授

研究者番号：80109082

尾角 正人 (OKADO MASATO)  
大阪大学・基礎工学研究科・准教授  
研究者番号：70221843

中屋敷 厚 (NAKAYASHIKI ATSUSHI)  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号：10237456

竹山 美宏 (TAKEYAMA YOSHIHIRO)  
筑波大学・数理物質科学研究科・講師  
研究者番号：60375392

庵原 謙治 (IOHARA KENJI)  
リヨン大学(フランス)・数学教室・  
准教授  
研究者番号：00322199

鈴木 武史 (SUZUKI TAKESHI)  
岡山大学・自然科学研究科・准教授  
研究者番号：30335294

竹村 剛一 (TAKEMURA KOUICHI)  
横浜市立大学・国際総合科学研究科・  
准教授  
研究者番号：10326069