

平成 21 年 5 月 7 日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2005～2008

課題番号：17340041

研究課題名（和文） 非平衡界面現象における表面張力とその相互作用

研究課題名（英文） Surface tension and its interaction for non-equilibrium surface phenomena

研究代表者

利根川 吉廣(TONEGAWA YOSHIHIRO)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80296748

研究成果の概要：フェイズフィールド法は相分離面を含む非一様状態を表すため、理論と数値計算に多用されている。当該研究では、フェイズフィールド法における内部遷移層のプロファイルについて特別な仮定を置かなくても、エネルギーおよびその第一変分、またはそれに類する積分量が制御されていれば、仮定が結果として自動的に成り立つ構造をもつことを様々な問題設定（De Giorgi 問題、流体問題、大偏差原理問題など）で示し、フェイズフィールド法の数学的基礎の解明を進めた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,500,000	0	3,500,000
2006年度	3,000,000	0	3,000,000
2007年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
総計	12,600,000	1,830,000	14,430,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：相分離、表面張力、フェーズフィールドモデル、変分問題、Allen-Cahn 方程式、非線形偏微分方程式、曲率流、Cahn-Hilliard 方程式

1. 研究開始当初の背景

2つの異なる相の界面の動的界面現象、例えば液気相界面、結晶の固液相界面、2元合金の粒界面などは、理学的に興味深いだけでなく産業、工学上重要な自然現象である。特に高分子などのミクロスケールの非平衡界面現象で重要なのは界面の表面張力であり、それに加えて他の場、例えば温度場、流速場、電磁場、又は他の秩序場などの相互作用が重要となる。現象は空間的に非一様であるため、一般にモデル問題は非線形偏微分

方程式系である。この問題に対し、相分離状況をフェイズフィールド（PF）で表す方法が強力な解析法の一つとして注目されており、自由境界問題の重要な研究課題となっている。表面張力効果を表すエネルギーは古典的には界面面積であるが、PF法ではあるパラメータで制御された汎関数エネルギーとして扱われる。私は現在までの研究で、PF法における基礎理論構築に携わってきており、PF法の界面領域と、その特異極限である微分幾何的な概念としての界面の関係を調べてきた。研究開始当初の時点において、過去の研究に

より核心の汎関数を変分的に扱う為には不可欠である、(1)定常問題の理解とその一般化、(2)基本的な時間発展問題の理解、(3)安定解の理解、の3つを最も一般的な測度論的レベルで行っていたが、基本的に表面張力効果のみのモデル問題を考えていた。一方で表面張力が他の場と相互作用する静的、動的問題と、表面張力以外のエネルギー寄与が汎関数にある場合の研究はまだ端緒にいたばかりであるといえる状況であった。

2. 研究の目的

これら過去の基礎研究に立脚して当該研究で目指すのは表面張力が他の場と相互作用する静的、動的問題と、表面張力以外のエネルギー寄与が汎関数にある場合の研究であり、具体的には以下3つの研究の方向性を模索した。

(1) 2相 Navier-Stokes (NS) 流の問題。各相では NS 方程式が満たされ、分離界面は2相間の圧力差及び界面表面張力の2つの効果で運動する問題を考える。分離面の運動自体も流体運動に影響するのでこれは流体運動と界面運動の相互作用を含む問題である。時間大域的な古典解の存在は、界面の特異性の出現によって一般には成り立たない。幾何学的測度論の枠組みでの弱解を PF 法で示し、この分野の基礎理論構成を目指す。純粋な平均曲率流の場合は Brakke による弱解に対しての正則性理論(1976)があるが、NS 流を伴う場合に拡張する。同時に時間局所的な古典解の構成を行う。

(2) 表面張力流の問題。分離界面の表面張力に内的、外的な要因で空間的不均一性がある場合には、界面自由エネルギーを平衡化するために表面張力流が起こることが知られている。現象論的なモデル化は行われており、PF 法を用いた数値計算も Liu 等によって行われている。一方、数学分野における理論結果はまだ存在しない。PF 法の特異極限問題を解析し、表面曲率流の理解を数学的な側面から行う。

(3) 弾性エネルギーとのカップリング問題。弾性エネルギーと界面面積を表す量とが制御されているときの、界面領域の特異極限についての静的、動的な構造定理を示すことを目標とする。また確率論での Freidlin - Wentzell 理論では異なる動機付けから同様な汎関数が現れるが、その応用を視野に入れた研究を遂行する。

これら解析において主要な役割を演じるのは2相を分離する界面の表面張力であり、よ

って微分幾何、非線形偏微分方程式論、幾何学的測度論の様々な概念や技術が必要である。時間的に動く界面に対してすべての点で滑らかであることを要請することは物理的に不適切であり、よって幾何学的測度論の一般化された概念としての界面の設定が不可欠で本質的である。自由界面を含む流体問題は古典的である一方、時間大域解の存在についての結果はほとんどないといってよい上、流体方程式と曲率を融合する新しい理論展開でなければならぬという意味で独創的で意義深い。PF 法を用いた数値計算に対しても特に現実的な2、3次元数値解析に対して、我々の行う詳細な解析は理論面での極めて有意義なサポートになり、解析学全般の発展にも寄与する。

3. 研究の方法

PF 法を用いた特異摂動極限としての2相 NS 方程式の弱解存在定理の研究を行う。これに関しては以前の結果を応用することにより、ある程度すでに見込みは立っている。またその弱解である varifold 解の正則性を自然な仮定の下で示す。平均曲率流の場合でも測度論的に自然な仮定の下で正則性が示されており、それと同等程度の仮定が必要である。弾性エネルギーの寄与がある場合の研究については1次元の場合の結果を現在準備中の論文で示しているので、適宜高次元の場合を研究する。

これら研究は研究代表者の利根川、その大学院生および分担研究者が主体となって行うが、界面の問題は研究分担者である神保氏の専門である Ginzburg-Landau (GL) 方程式でも超伝導現象における渦糸が界面にとって変わって出現するという意味で類似的であり、数学的内容が極めて重なる部分が多い。PF 法の総合的な研究という観点からの研究を界面と渦糸の両面から緊密な連絡を取り合うことで行う。

4. 研究成果

(1) De Giorgi 予想の部分的解決

曲面や曲線に対し、その平均曲率(曲線の場合は単に曲率)の2乗積分量は曲線の弾性エネルギーや曲面積の変分問題及び曲率流問題等を考慮するにあたっては大変重要な量である。PF 法の枠組みにおいて拡散界面の曲率2乗積分量に相当する積分表現があるのであるが、それが実際に拡散界面の厚さを0に近づけたときに極限の界面の曲率2乗積分に対して自然な下半連続的な性質を持つ事を長瀬優子氏との共同研究で2次元空間、つまり界面が曲線の場合に示す事が出来た(雑誌

論文). また界面領域はハウズドルフの意味での距離で極限の曲線に収束する事も示せた. これら結果は PF 法の数理解析においての基礎的な結果である. 3次元も含む結果は同時期に独立して M. Roeger と R. Schaetzle が示したが, 我々の方法とは異なる評価を用いたものである. この問題は De Giorgi によって予想された経緯があり, その予想を2次元では我々が独立に証明したことになる.

(2) 大偏差原理と変分問題

2つの同等な安定点を持つポテンシャルを外力項として持つ確率偏微分方程式に対し, 大偏差原理に動機付けられた action functional を考える. ある特別な時空スケールのみで空間的非一様性が期待されるのであるが, その特異極限問題の研究を行い, 最小解の特異極限の完全な特徴づけに成功した(雑誌論文と). またその高次元版の問題では, 平均曲率と界面速度の和の2乗を曲面上時空で積分したものが最小化すべき量となっている. この汎関数は特別な最小化解のクラスとして, 界面速度 = - 平均曲率の平均曲率流が汎関数値零解としてすべて含まれる. この幾何学的な最小化問題をまず変分法の立場から理解する為, 東北大学の岡部氏と初期時刻と最終時刻の曲線を与えたときにこれをつなぐ非自明な最小解が存在するかどうかについて, 平均曲率流の近傍で問題を線形化した摂動問題として考え, 準備的な様々な結果を得た.

(3) Gibbs-Thomson の関係

相分離現象をモデルとした PF 法の代表的な方程式の一つに Cahn-Hilliard 方程式がある. 界面厚みを表すパラメータ ϵ を 0 に近づけるとときに適当な時間スケールを導入すると極限では自由境界と化学ポテンシャルが Mullins-Sekerka 方程式を満たすことがある特別な場合は示されている. 最小限かつ自然な一般の場合に同様なことはまだ示されていないが, 証明のために必要な事はフェイズフィールド近似の極限で, 自由境界の曲率と化学ポテンシャルを関係付ける Gibbs-Thomson の関係を示す事である. Roeger との共同研究で, フェイズフィールドの枠組みで化学ポテンシャルに対応する量が, あるソボレフノルム(一回弱微分が p 可積分, p は空間次元より大)で ϵ に関して一様有界である場合には極限で Gibbs-Thomson の関係が成り立つことを示した(雑誌論文).

(4) 2相 Navier-Stokes 流

界面を隔てて同密度で2相分離した非線形粘性(ノンニュートニアン)・非圧縮性流体の

運動を考える. ここで界面は流体によって移動するのみでなく平均曲率に比例した速度を加えた速さで移動すると仮定する. また流体も界面から平均曲率に比例した力を界面上で受けると仮定する. これら平均曲率の効果は物理的な仮定と必ずしも一致するわけではないが, 界面の特異性を避けるための数値計算における正則化の一手法とも考えられる. この問題の弱解を構成するため Allen-Cahn 方程式と Navier-Stokes 方程式をカップルさせた問題を解析し, 適切な非線形粘性を入れた場合には弱解が常に存在する事を示し, 現在論文を準備中である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11件)

Hong, Ming-Chun, Tonegawa, Yoshihiro, Yassin, Alzubaidi, Partial regularity of weak solutions to Maxwell's equation in quasi-static electromagnetic field, Methods and Applications of Analysis 15, no. 2, 205-222 (2008)査読有

Roger, Matthias, Tonegawa, Yoshihiro, Convergence of phase-field approximations to the Gibbs-Thomson law, Calc. Var. Partial Differential Equations 32, no. 1, 111-136 (2008)査読有

Westdickenberg, Maria, Tonegawa, Yoshihiro, Higher multiplicities in the one-dimensional Allen-Cahn action functional, Indiana University Math. Journal 56, (2007) no 6, 2935-2989 (2007) 査読有

Nagase, Yuko, Tonegawa, Yoshihiro, A singular perturbation problem with integral curvature bound, Hiroshima Math. J. 37, no. 3, 455-489 (2007)査読有

Giga, Yoshikazu, Kubo, Motohiko, Tonegawa, Yoshihiro, Magnetic clusters and fold energies, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 137, no. 1, 23-40 (2007) 査読有

Kohn, Robert, Reznikoff, Maria, Tonegawa, Yoshihiro, Sharp-interface limit of the action functional for Allen Cahn in one space dimension, Calc. Var. Partial Differential Equations 25, (2006) no. 4 503-534(2006)査読有

Nagase, Yuko, Tonegawa, Yoshihiro, Interior gradient estimate for 1-D anisotropic curvature flow, Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica 23 no. 1-2, 93-98 (2005)査読有

Tonegawa, Yoshihiro, Umeda, Noriaki, Hayakawa, Tohru, Ishibashi, Teruo, Evaluation of data in terms of two-dimensional random walk model: Interaction between NADH-cytochrome b5 reductase and cytochrome b5, Biomedical Research 26 (5) 207--212 (2005)査読有

Tonegawa, Yoshihiro, A diffused interface whose chemical potential lies in Sobolev spaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) 4, 487-510(2005)査読有

Chen, Yunmei, Rao, M., Tonegawa, Y., Wunderli, T., Partial regularity for a selective smoothing functional for image restoration in BV space, SIAM Journal on Mathematical Analysis 37, no. 4, 1098 - 1116 (2005)査読有

Tonegawa, Yoshihiro, On stable critical points for a singular perturbation problem, Comm. Analysis and Geometry 13, no. 2, 439-459(2005)査読有

〔学会発表〕(計 10件)

(以下すべて発表者は利根川吉廣)

Two-phase non-Newtonian fluid flow with surface tension, 第6回浜松偏微分方程式研究集会, 2008/12/23 静岡大学

On some regularity issues of stable critical points for phase boundary problems, 熊本における偏微分方程式研究集会, 2008/10/25 熊本大学

Existence of measure-valued solutions for two-phase non-Newtonian fluid flow with surface tension, 研究集会「第四回非線型の諸問題」, 2008/9/21 佐賀大学

Phase field model and the generalized Gibbs-Thomson law, Recent Progress on Pattern Formation and Dynamics in Mathematical Sciences, 2008/6/13 龍谷大学

Phase field model and the generalized Gibbs-Thomson law, Workshop on Nonlinear PDEs related to physical models, 2008/5/31 国立台湾大学

Various mathematical questions arising in phase separation problem, Geometry of singularities via PDE's, GMT and Diff. Geometry, 2007/1/10 東北大学

Allen-Cahn action functional and its singular perturbation, SNP2006, 2006/12/4 京都

A singular perturbation problem motivated by large deviation theory, SNP2005, 2005/11/28 京都

A singular perturbation problem motivated by large deviation theory, PDE and applications, 2005/11/14 University

of Florida

Singular perturbation limit of phase separation problem, PDE, 2005/7/25, Oberwolfach

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

無し

6. 研究組織

(1) 研究代表者

利根川 吉廣 (TONEGAWA YOSHIHIRO)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 80296748

(2) 研究分担者

神保 秀一 (JIMBO SHUICHI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 8020156
柳田 達雄 (YANAGITA TATSUO)
北海道大学・電子科学研究所・助教
研究者番号: 80242262

(3) 連携研究者

無し