

平成 21 年 5 月 29 日現在

研究種目：基盤研究（B）  
 研究期間：2005～2008  
 課題番号：17340045  
 研究課題名（和文） カオスと大自由度力学系の理解のための力学系の大域的分岐の研究  
 研究課題名（英文） Study of Global Bifurcations of Dynamical Systems for Understandings of Chaos and Systems with Large Degrees of Freedom  
 研究代表者 國府 寛司（KOKUBU HIROSHI）  
 京都大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号：50202057

## 研究成果の概要：

カオスや大自由度系を含む力学系の大域的構造とその分岐を幾何的方法，位相的方法，複素解析的方法，さらには応用に現れる具体的な数理モデルの解析などの様々な側面から研究して多くの成果を得た．特に本研究では，位相的方法を，精度保証付き数値計算に基づく計算的方法と組み合わせて力学系の大域的構造と分岐についての数学的に厳密な計算機支援解析の方法を開拓し，特異分岐構造の存在，カオス的振舞いを示す記号力学系の埋め込み，双曲性の検証などのいくつかの重要な問題を解決した．これは力学系の多様な振舞いを解析するための1つの有用な方法として今後，発展していく可能性があると期待される．

## 交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	4,100,000	0	4,100,000
2006年度	5,100,000	0	5,100,000
2007年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
総計	14,600,000	1,620,000	16,220,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：力学系，分岐，カオス，大自由度，大域

## 1．研究開始当初の背景

本研究は研究代表者が力学系の大域的分岐に関して申請時までに行ってきた研究成果と，代表者が力学系の位相的方法をテーマに平成13年度から15年度に行った日米共同研究の成果を受け，理論と応用の両方の側面から，力学系の大域的構造とその分岐を理解するための新しいアイデアの必要性が高まっていることを受けて構想されたもので

ある．

## 2．研究の目的

本研究の目的は，カオスと呼ばれる複雑で予測困難な振舞いをする力学系や大自由度の力学系の大域的振舞いの理解に重要な役割を演じる力学系の大域的構造やその分岐を調べるために，従来研究方法に加えて位相的方法，およびそれと融合した計算的方法

などの新しい手法を開拓することであった。ここでの計算的方法とは、単なる数値シミュレーションではなく、誤差の厳密な評価を伴った数値計算に位相的方法を援用して力学系の大域的構造や分岐を数学的厳密性を失わずに解析する方法をいい、代表者とその共同研究者が申請時までに行って来た研究成果をさらに発展させることを目指すものである。

### 3. 研究の方法

上記の研究目的の達成のために、本研究では研究計画を(1) 力学系の大域的構造の研究、(2) 大域的分岐の研究、(3) 応用、の3つに大別し、それぞれについて研究課題を設定して分担して研究を行った。より具体的には以下の通りである：

(1) では力学系の大域的構造の位相的記述、カオス的力学系の理解に本質的と考えられる部分双曲性の研究、またカオス的力学系の研究で大きな役割を果たした複素力学系のさらなる研究を行い、力学系の大域的構造とそれに基づいたカオス的力学系のより深い理解を目指して研究を行った；

(2) では(1)の成果をも援用しつつ、力学系の特異構造と呼ばれる特徴的な大域的不変集合の持つ構造からの分岐や、力学系の分岐の計算的方法に基づく厳密な検証の研究を行うと共に、力学系のカオス的構造についての新しい計算的アプローチを展開した；

(3) では以上の成果を踏まえてより具体的な非線型現象の力学系モデルに応用する。特にパターン形成や流体の偏微分方程式モデル、特異摂動問題、カオス的力学系の結合系などの大自由度の力学系に見られる現象の解析を行った。

### 4. 研究成果

研究代表者の研究成果を中心に、本研究の目的から見て特に重要な研究成果を以下に述べる。

(1) 余次元3の特異性の開折を理解するためのスケール極限として得られるある種の3次元ベクトル場の3パラメータ族の大域的分岐を調べることが本質的に重要である。このベクトル場の族の部分族には、蔵本-Sivashinsky 方程式として知られる非線型偏微分方程式の進行波解がみだす非線型上微分方程式が含まれており、その理由で多くの数値的研究がなされ、特に Cocoon 分岐と呼ばれる無限回の heteroclinic 分岐を含む非常に複雑な分岐が数値的に見出されていたが、その数学的構造の理解はできていなか

った。本研究では、この Cocoon 分岐をある大域的な heteroclinic cycle の特異構造として捉え、そこからの分岐として数値的に観察されている複雑な分岐構造を数学的に明快に説明することに成功した(論文)。さらに具体的な常微分方程式系にこの特異構造が存在することを、位相的方法と精度保証付き数値計算を組み合わせることで数学的に厳密な方法で検証することにも成功した(論文)。

(2) fast-slow 系というベクトル場の特異摂動系は、速い時間スケールと遅い時間スケールを含む現象の数理モデルとして頻繁に現れ、様々な数学的アプローチによって研究されて来た。本研究では代表者とその共同研究者がこれまで行って来た特異摂動的ベクトル場に関する Conley 指数理論を遅い多様体が2次元以上の場合に拡張した(論文)。また、その応用として Gardner と Smoller によって研究されたある種の反応拡散系の進行波解を調べ、2種類の周期進行波解や、それを任意の順序でつなぎ合わせた形の無限個の進行波解の存在を証明した(論文)。この結果の証明は、この特異摂動的ベクトル場が本質的に記号力学系と対応付けられることを用いており、このようなクラスの力学系の多様な振舞いの理解のための1つの有力な方法を与えたと言える。

(3) 区間上で定義された1次元写像の1パラメータ族に対して、臨界点近傍の外での一様双曲性に関する Mane の条件を満たすパラメータ集合を、グラフ・アルゴリズムと精度保証付き数値計算を用いて求める方法を与えた。また、それを実際に2次関数の場合に適用して、その一様双曲性の強さとパラメータの関係を示すいくつかの計算結果を得た(論文)。これらの結果は、1次元写像の振舞いに対する統計的性質と密接に関係しており、これを基にして正の Lyapunov 数や絶対連続な不変測度の存在するパラメータ集合の計算機援用解析への第一歩となる結果であると考えられる。

(4) 連携研究者の荒井は、位相的方法と計算機を用いた精度保証付き数値計算を組み合わせるいくつかの重要な結果を得た。論文では、微分同相写像によって定義される離散時間の力学系の双曲型周期点の安定多様体と不安定多様体が2次の homoclinic 接触を持つことを数学的に厳密に検証する方法を与えた。このような homoclinic 接触はカオス的アトラクタの存在を結論付ける重要な条件として盛んに理論的な研究がなされており、この方法は具体的な力学系に対する応用上の有用性が高い。実際、この方法を Henon

写像と呼ばれる2次元写像に適用して、いくつかのパラメータ値での homoclinic 接触の検証に成功した。荒井はさらに論文で、Henon 写像の双曲性パラメータ集合を位相的方法と計算的方法の組合せによって求めることにも成功した。双曲性パラメータでは力学系は構造安定であり、さらに双曲型力学系の一般論によりその大域的構造は原理的には記号力学系によって完全に記述される。このことから特に周期点の個数に関する情報や位相的エントロピーなどの力学系のカオス的振舞いについての特徴的な性質も得られる。荒井の方法は今後、このような方向の研究に非常に有用なものとして発展すると期待される。

(5) このほかにも、力学系の統計的性質、特に連続時間の力学系に対する相関の指数的減衰についての辻井の重要な研究成果や、無限次元力学系としての非線型偏微分方程式の様々なダイナミクスと分岐現象に関する岡本、西浦、小川らの結果などの重要で興味深い研究成果が多く得られた。また、複素力学系や保存力学系についての成果も連携研究者らによって得られており、本研究の目的は十分に達成されたと考えている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 15 件)

F.Dumortier, S.Ibanez, H.Kokubu, Cocoon bifurcations in three dimensional reversible vector fields, *Nonlinearity* **19** (2006), 305-328.

T.Gedeon, H.Kokubu, K.Mischaikow, H.Oka, The Conley index for fast-slow systems II: Multi-dimensional slow variable, *J. Diff. Eq.* **225** (2006), 242-307.

Z.Arai, K.Mischaikow, Rigorous computations of homoclinic tangencies. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **5** (2006), 280—292.

C.Liverani, M.Tsujii, Zeta functions and dynamical systems. *Nonlinearity* **19** (2006), 2467—2473.

A.Avila, S.Gouezel, M.Tsujii, Smoothness of solenoidal attractors. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **15** (2006), 21—35.

S.-C.Kim, H.Okamoto, Uniqueness of the exact solutions of the Navier-Stokes equations having null nonlinearity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **136** (2006), 1303—1315.

H.Kokubu, D.Wilczak, P.Zgliczynski, Rigorous verification of the cocoon bifurcation in the Michelson system, *Nonlinearity* **20** (2007), 2147-2174.

M.Gameiro, T.Gedeon, W.Kalies, H.Kokubu, K.Mischaikow, H.Oka, Topological horseshoes of travelling waves for a fast-slow predator-prey system, *J. Dyn. Diff. Eq.* **19** (2007), 623-654.

Z.Arai, On hyperbolic plateaus of the Hénon map. *Experiment. Math.* **16** (2007), no. 2, 181—188.

V.Baladi, M.Tsujii, Anisotropic Holder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms. *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007), 127—154.

Y.Nishiura, T.Teramoto, X.Yuan, K.-I.Ueda, Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media. *Chaos* **17** (2007), 037104, 21pp.

T.Ogawa, T.Okuda, Bifurcations for Turing instability without SO(2)-symmetry. *Kybernetika* **43** (2007), 869—877.

S.Day, H.Kokubu, S.Luzzatto, K.Mischaikow, H.Oka, P.Pilarczyk, Quantitative hyperbolicity estimates in one-dimensional dynamics, *Nonlinearity* **21** (2008), 1967-1987.

M.Tsujii, Decay of correlations in suspension semi-flows of angle-multiplying maps. *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **28** (2008), 291—317.

Z.Arai, H.Kokubu, P.Pilarczyk, Recent development in rigorous computational

methods in dynamical systems, to appear in Japan J. Indust. Appl. Math.

[学会発表](計10件)

H.Kokubu, Topological singular perturbation theory based on Conley index, International Conference "Infinite dimensional dynamical systems", CIRM, Luminy, France July 4-8, 2005

H.Kokubu, Conley index theory for slow-fast systems and its application to travelling wave solutions in a predator-prey system, MSJ-IRI2005 International Conference "Asymptotic Analysis and Singularities", 2005年7月18-27日, Sendai International Center.

國府寛司, Conley指数理論の応用における最近の発展(特別講演)第4回非線形ダイナミクス制御研究会 2006年3月22日, 大阪大学吹田キャンパス

H.Kokubu, Conley-Morse chain complexes and chain maps based on spectral sequences. International Conference "Dynamics, Topology, and Computation", Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland, June 4-10, 2006

H.Kokubu, Recent developments in topological-computational approaches to nonlinear dynamics: An overview, The 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2006) Hotel Royal Carlton, Bologna, Italy. September 11-14, 2006

H.Kokubu, Rigorous verification of the cocoon bifurcation in the Michelson system, International Conference on Bifurcation Theory of Dynamical Systems and Related Topics, Peking University, Beijing, P.R.China. December 15-19, 2006

H.Kokubu, Rigorous computational methods for global dynamics and bifurcations: two examples, International Conference "Dynamics in Perturbations" Hasselt University, Hasselt, Belgium, April 23-25, 2007

H.Kokubu, Computational approach to the Misiurewicz-Mane theorem, International Congress for Industrial and Applied Mathematics, Zurich, The Switzerland. July 16-20, 2007

H.Kokubu, Bifurcation of Morse decompositions: A case study International Conference on Foundation of Computational Mathematics, City University of Hong Kong, Hong Kong, P.R.China, June 16-18, 2008

國府寛司, トポロジー・計算・ダイナミクス, 日本数学会秋季分科会 企画特別講演, 東京工業大学2008年9月24-27日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

國府 寛司 (KOKUBU HIROSHI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 50202057

### (2) 研究分担者

浅岡 正幸 (ASAOKA MASAYUKI)  
京都大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 00093237  
(平成18年度から長期海外渡航のため研究参加を辞退。)

また, 以下の連携研究者はすべて平成19年度までは研究分担者として研究に参画した

### (3) 連携研究者

河野 明 (KONO AKIRA)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 00093237

穴倉 光広 (SHISHIKURA MITSUHIRO)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 70192606

稲生 啓行 (INO HIROYUKI)  
京都大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号：00362434

吉原 英昭 (YOSHIHARA HIDEAKI)  
京都大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号：10182809

岡本 久 (OKAMOTO HISASHI)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：40143359

宇敷 重広 (USHIKI SHIGEHIRO)  
京都大学・大学院人間環境学研究科・教授  
研究者番号：10093197

木坂 正史 (KISAKA MASASHI)  
京都大学・大学院人間環境学研究科・  
准教授  
研究者番号：70244671

西浦 廉政 (NISHIURA YASUMASA)  
北海道大学・電子科学研究所・教授  
研究者番号：00131277

荒井 迅 (ARAI ZIN)  
北海道大学・創成科学共同研究機構・  
特任助教  
研究者番号：80362432

伊藤 秀一 (ITO HIDEKAZU)  
金沢大学・数物科学系・教授  
研究者番号：90159905

三波 篤郎 (SANNAMI ATSURO)  
北見工業大学・工学部・教授  
研究者番号：30154157

岡 宏枝 (OKA HIROE)  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号：20215221

小室 元政 (KOMURO MOTOMASA)  
帝京科学大学・医療科学部・教授  
研究者番号：00186818

小川 知之 (OGAWA TOSHIYUKI)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授  
研究者番号：80211811

林 修平 (HAYASHI SHUHEI)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：20247208

辻井 正人 (TSUJII MASATO)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：20251598

石井 豊 (ISHII YUTAKA)  
九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
研究者番号：20304727